Geometryczna teoria grup, lista 9

Zadanie 1. Opisz *Ends(X)* dla

(i) X będącego drzewem o wierzchołkach ustalonego stopnia n,

(ii) $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Z} \text{ lub } y = 0\}$ z metryką będącą infimum długości ścieżek.

Zadanie 2. Wykaż (nie wykorzystując twierdzeń z wykładu), że następujące warunki są równoważne:

(i) G ma skończoną podgrupę normalną o ilorazie $\mathbf{Z}$ lub $\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2$,

(ii) $G = F*_F$ gdzie F jest skończona lub $G = A*_F B$ gdzie F jest skończona indeksu 2 w A i B.

Używając twierdzeń z wykładu wykaż równoważność z $e(G) = 2$.

Zadanie 3. Niech G będzie skończenie generowaną, beztorsyjną grupą wirtualnie wolną. Wykaż, że G jest wolna.

Definicja. Niech K będzie kompleksem symplicjalnym wymiaru 2. 1–*kocyklem* nazywamy odwzorowanie z ze zbioru krawędzi K w $\mathbf{Z}_2$ takie, że dla każdego trójkąta w K suma wartości z po trzech krawędziach jego obwodu jest równa 0.
1–*kobrzegiem* nazywamy odwzorowanie b ze zbioru krawędzi K w $\mathbf{Z}_2$ takie, że istnieje odwzorowanie c ze zbioru wierzchołków K w $\mathbf{Z}_2$, że dla każdej krawędzi xy mamy $b(xy) = c(x) - c(y)$.
Przez $Z^1(K, \mathbf{Z}_2)$ oznaczamy zbiór 1–kocykli ze strukturą przestrzeni liniowej nad $\mathbf{Z}_2$. Przez $B^1(K, \mathbf{Z}_2)$ oznaczamy zbiór 1–kobrzegów ze strukturą przestrzeni liniowej nad $\mathbf{Z}_2$. Mamy $B^1(K, \mathbf{Z}_2) \subset Z^1(K, \mathbf{Z}_2)$. Ilorazową przestrzeń liniową $H^1(K, \mathbf{Z}_2) = Z^1(K, \mathbf{Z}_2)/B^1(K, \mathbf{Z}_2)$ nazywamy przestrzenią 1–*kohomologii* K.

Zadanie 4. Dla każdego traku S możemy rozważać odwzorowanie $z(S)\colon K^1 \to \mathbf{Z}_2$ przypisujące krawędzi γ liczbę $\gamma \cap S$ modulo 2. Wykaż, że $z(S)$ jest 1–kocyklem.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli $s_1, \ldots, s_k$ są rozłącznymi skręconymi trakami, to $[z(s_1)], \ldots, [z(s_k)] \in H^1(K, \mathbf{Z}_2)$ są nietrywialne i liniowo niezależne.

Zadanie 6. Niech β będzie wymiarem przestrzeni $H^1(K, \mathbf{Z}_2)$. Niech $s_1, \ldots, s_k$ będą rozłącznymi trakami w K. Wykaż, że wtedy $K \setminus (s_1 \cup \ldots \cup s_k)$ ma co najmniej $k - \beta$ składowych. Wskazówka: rozważ jądro odpowiedniego odwzorowania $\mathbf{Z}_2^k \to H^1(K, \mathbf{Z}_2)$.

Zadanie 7. Niech β będzie wymiarem przestrzeni $H^1(K, \mathbf{Z}_2)$. Niech $V(K)$ i $T(K)$ oznaczają liczbę wierzchołków i trójkątów K. Wykaż, że w K można wybrać co najwyżej $2\beta + V(K) + T(K)$ rozłącznych parami nierównoległych traków.