Geometryczna teoria grup, lista 8

Zadanie 1. Niech X będzie właściwą przestrzenią hiperboliczną. Wykaż, że dla dowolnego x_0 każdy punkt w ∂X jest reprezentowany przez ciąg (x_i) spełniający $|x_k x_l| = |k-l|$.

Zadanie 2. Wykaż, że dla X δ–hiperbolicznej i $w \in X$ oraz $x, x' \in \partial X$ reprezentowanych przez $(x_i), (x'_j)$ zachodzi

$$(x|x')_w - 2\delta \leqslant \liminf_{i,j\to\infty} (x_i|x'_j)_w.$$

Zadanie 3. Wykaż, że brzeg Gromowa właściwej przestrzeni hiperbolicznej (w szcz. grupy hiperbolicznej) jest przestrzenią zwartą.

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią δ–hiperboliczną. Niech $(x_i), (y_i)$ będą (L, C)–quasi-izometrycznymi zanurzeniami $\mathbf{N}$ wyznaczającymi ten sam punkt w nieskończoności. Wykaż, że istnieje stała $K = K(\delta, L, C)$, że dla i wystarczająco dużych istnieje j spełniające $|x_i y_j| \leqslant K$. Dla uproszczenia załóżmy, że X jest właściwa i w związku z tym można stosować Zadanie 1.

Zadanie 5. Niech X, Y będą δ–hiperboliczne a $f\colon X \to Y$ będzie (L, C)–quasi-izometrycznym włożeniem. Wykaż, że istnieje $A = A(\delta, L, C)$ spełniająca dla wszystkich $w, x, y, z \in X$:

(i)

$$\frac{1}{L}(x|y)_w - A \leqslant (f(x)|f(y))_{f(w)} \leqslant L(x|y)_w + A,$$

(ii)

$$\frac{1}{L}|(x|y)_w - (y|z)_w| - A \leqslant |(f(x)|f(y))_{f(w)} - (f(y)|f(z))_{f(w)}| \leqslant$$
$$\leqslant L|(x|y)_w - (y|z)_w| + A.$$

Zadanie 6 (lemat o ping-pongu)**.** Niech g, h będą bijekcjami zbioru Ω spełniającymi dla rozłącznych i nie wyczerpujących Ω podzbiorów $A, B, C, D \subset \Omega$:

$$g(\Omega \setminus B) \subset A, \quad h(\Omega \setminus D) \subset C.$$

Wykaż, że wtedy g i h generują grupę wolną w grupie bijekcji Ω.

Zadanie 7. Niech G będzie podgrupą grupy bijekcji zbioru Ω. Przypuśćmy, że dla $a, b \in \Omega$ orbity Ga i Gb są nieskończone. Wykaż, że istnieje $g \in G$ spełniające

$$\{a, b\} \cap \{g(a), g(b)\} = \emptyset.$$