Geometryczna teoria grup, lista 7

Zadanie 1. Wykaż, że złożenie quasi-izometrycznych włożeń jest quasi-izometrycznym włożeniem, a złożenie quasi-izometrii jest quasi-izometrią.

Zadanie 2. Quasi-izometrię $h\colon X \to X$ nazywamy *ograniczoną* jeśli dla pewnej stałej C zachodzi $|x, h(x)| \leqslant C$ dla każdego $x \in X$. Wykaż, że dla każdej quasi-izometrii $f\colon X \to Y$ istnieje quasi-isometria $g\colon Y \to X$ taka, że złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ są ograniczone.

Zadanie 3. Niech $f\colon X \to Y$ będzie quasi-izometrią, a g odwzorowaniem z Y w Z. Wykaż, że g jest quasi-izometrycznym włożeniem wtedy i tylko wtedy kiedy $g \circ f$ jest quasi-izometrycznym włożeniem.

Zadanie 4. Wykaż, że wszystkie drzewa symplicjalne o wierzchołkach stopnia $\geqslant 3$ ale ograniczonego z góry są quasi-izometryczne.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli $f\colon X \to Y$ jest quasi-isometrią, X jest geodezyjna a Y jest hiperboliczna, to wtedy X jest również hiperboliczna. Wykorzystaj lemat o stabilności quasi-geodezyjnych.

Zadanie 6. Znajdź zdystortowane nieskończone grupy cykliczne w grupach

(i) $B(1,2) = \langle t, a \mid t^{-1}at = a^2 \rangle$,

(ii) Heisenberga $\langle s, t, r \mid [s,t] = [s,r] = 1, [t,r] = s \rangle$.

Zadanie 7. Wykaż, że w przestrzeniach δ–hiperbolicznych 10δ–lokalne geodezyjne są quasi-geodezyjne.

Zadanie 8. Niech g będzie elementem nieskończonego rzędu w grupie hiperbolicznej. Wykaż, że iloraz centralizatora $C(g)$ przez $\langle g \rangle$ jest grupą skończoną. W szczególności grupa hiperboliczna nie zawiera podgrupy $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.