

## Geometryczna teoria grup, lista 6

**Zadanie 1.** Niech  $X$  będzie geodezyjną przestrzenią metryczną spełniającą warunek  $\delta$ -szczupłych trójkątów. Znajdź  $\delta'$  dla którego  $X$  spełnia warunek  $\delta'$ -cienkich trójkątów.

**Definicja.** Produktem Gromowa punktów  $x, y$  względem  $w$  nazywamy wielkość

$$(x|y)_w = \frac{1}{2}(|xw| + |yw| - |xy|).$$

**Zadanie 2.** Niech  $X$  będzie geodezyjną przestrzenią metryczną spełniającą warunek  $\delta$ -cienkich trójkątów. Wykaż, że dla dowolnej czwórki punktów  $w, x, y, z$  zachodzi warunek Gromowa

$$(x|y)_w \geq \min\{(x|z)_w, (z|y)_w\} - 2\delta,$$

i że jest on równoważny z

$$|xy| + |wz| \leq \max\{|xz| + |yw|, |xw| + |yz|\} + 2\delta.$$

**Zadanie 3.** Wykaż, że w prezentacji grupy hiperbolicznej w której działa algorytm Dehna każdy element skończonego rzędu jest sprzężony do elementu, którego długość jest mniejsza od długości najdłuższego relatora. W szczególności w grupie hiperbolicznej jest tylko skończenie wiele klas sprzężoności elementów skończonego rzędu.

**Definicja.** Mówimy, że funkcja  $e: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  jest *funkcją rozbieżności* dla przestrzeni metrycznej  $X$ , jeśli spełnia następujący warunek. Rozważmy dowolne  $x, y, y' \in X$  spełniające  $|xy| = |xy'| = k + n$ . Załóżmy, że punkty  $z, z'$ , które leżą na pewnych geodezyjnych  $xy, xy'$  w odległości  $k$  od  $x$  spełniają  $|zz'| > e(0)$ . Wtedy najkrótsza ścieżka łącząca  $y$  i  $y'$  poza kulą otwartą  $B(x, k + n)$  ma długość co najmniej  $e(n)$ .

**Zadanie 4.** Wykaż, że jeśli  $X$  jest hiperboliczna, to istnieje wykładnicza funkcja rozbieżności. Wskazówka: Skorzystaj z warunku cienkich trójkątów dla  $xyy'$  i punktu  $z$ . Następnie niech  $m$  będzie środkiem ciężki  $yy'$  jak w definicji funkcji rozbieżności. Skorzystaj z warunku cienkich trójkątów dla  $yy'm$ . Dalej rozważ środki ścieżek  $ym$  i  $my'$ , itd.

**Zadanie 5.** Niech  $X$  będzie geodezyjną przestrzenią metryczną spełniającą warunek  $\delta$ -cienkich trójkątów. Niech  $xy \subset X$  będzie geodezyjną długości  $\geq 6R + 2\delta$ , której środkowy segment długości  $2R$  oznaczamy przez  $I$ . Niech  $x'y' \subset X$  będzie geodezyjną o środku  $m$  i końcach spełniających  $|xx'| \leq R$ ,  $|yy'| \leq R$ . Wykaż  $|m, I| \leq 2\delta$ .

**Zadanie 6.** Wykaż, że dla grupy hiperbolicznej problem sprzężoności jest rozstrzygalny.