Geometryczna teoria grup, lista 4

Zadanie 1. Wykaż, że przekształcenia Möbiusowe zachowujące dysk jednostkowy zachowują metrykę hiperboliczną.

Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni trójkąta idealnego.

Zadanie 3. Wykaż, że moduł śladu macierzy w $\mathbf{PSL}(2, \mathbf{R})$ jest mniejszy od 2, równy 2, lub większy od 2, w zależności od tego, czy odpowiadające mu przekształcenie $\mathbf{H}^2$ jest eliptyczne, paraboliczne, czy hiperboliczne.

Zadanie 4. Zrealizuj grupę o prezentacji

$$\langle p, r, s, t, u \mid [p, r] = [r, s] = [s, t] = [t, u] = [u, p] = 1 \rangle$$

jako podgrupę izometrii $\mathbf{H}^2$.

Zadanie 5. Oblicz pole pięciokąta prostokątnego w $\mathbf{H}^2$.

Zadanie 6. Niech P będzie jednospójnym wielokątem w parkietażu $\mathbf{H}^2$ pięciokątami prostokątnymi. Oszacuj liczbę pięciokątów w P przez liczbę krawędzi na jego obwodzie.

Zadanie 7. Rozważamy $\mathbf{H}^2$ z parkietażem ośmiokątami pochodzącym od powierzchni genusu 2.

(i) Znajdź wzór na związek między polem a sumą kątów zewnętrznych pierścienia otrzymanego z ilorazu nieskończonego $\mathbf{Z}$–niezmienniczego wielokątnego pasa w $\mathbf{H}^2$ przez nieskończoną grupę cykliczną $\mathbf{Z}$.

(ii) Niech w, v będą słowami widocznymi na brzegach takiego pierścienia. Przy założeniu, że algorytm Dehna nie może uprościć v ani w, ani ich cyklicznych przesunięć, jakie są możliwe postaci pierścienia?

(iii) Wykaż, że *problem sprzężoności* jest rozstrzygalny dla grupy podstawowej G powierzchni genusu 2, tzn. istnieje algorytm, który rozstrzyga, czy $f = [w], g = [v]$ są sprzężone w G.