Geometryczna teoria grup, lista 2

Zadanie 1. Znajdź warunek dostateczny i konieczny na to by element $g \in G_0$ działał trywialnie na drzewie Bass'a–Serre'a związanym z $G_1 *_{G_0} G_1$.

Definicja. Załóżmy, że mamy dane dwa włożenia ϕ^1, ϕ^2 grupy G_0 w grupę G_1. HNN**-rozszerzeniem** $G_1 *_{G_0}$ nazywamy grupę

$$G_1 * \mathbf{Z}/_{\langle\langle \phi^1(g)t = t\phi^2(g) \rangle\rangle},$$

gdzie t jest generatorem $\mathbf{Z}$, a grupa przez którą dzielimy jest normalnie generowana przez $t^{-1}\phi^1(g)t\phi^2(g)^{-1}$ po wszystkich $g \in G_0$.

Twierdzenie. *Załóżmy, że mamy dane przestrzenie X_0, X_1 o grupach podstawowych G_0, G_1 i odwzorowania $f^1, f^2 \colon X_0 \to X_1$ spełniające $f^i_\sharp = \phi^i$. Rozważamy przestrzeń*

$$X = X_1 \cup X_0 \times [0,1]/\sim,$$

gdzie utożsamiamy

$$X_0 \times [0,1] \ni (x,0) \sim f^1(x) \in X_1,$$
$$X_0 \times [0,1] \ni (x,1) \sim f^2(x) \in X_1.$$

Wtedy grupa podstawowa przestrzeni X jest równa $G_1 *_{G_0}$.

Zadanie 2. Znajdź nietrywialne działanie $G_1 *_{G_0}$ na prostej rzeczywistej.

Zadanie 3. Skonstruuj drzewo z takim działaniem grupy $G_1 *_{G_0}$, żeby stabilizatorami wierzchołków były podgrupy sprzężone do G_1 a stabilizatorami krawędzi podgrupy sprzężone do G_0.

Zadanie 4. Wykaż, że naturalne odwzorowanie $G_1 \to G_1 *_{G_0}$ jest włożeniem.

Zadanie 5. Rozważmy $G_0 = G_1 = \mathbf{Z}$ oraz $\phi^1(n) = 2n$, $\phi^2(n) = 3n$. Wykaż, że $G_1 *_{G_0}$ dopuszcza epimorfizm na siebie, który nie jest izomorfizmem.