

Geometria Różniczkowa I

Zadania przygotowawcze do pierwszego kolokwium

Zadanie 1. Oblicz długość krzywej parametrycznej

$$r(t) = (a \cosh t, a \sinh t, at)$$

od t_0 do t_1 .

Zadanie 2. Znajdź parametryzację naturalną krzywej

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Zadanie 3. Dla każdej z krzywych parametrycznych oblicz krzywiznę i skręcenie w dowolnym punkcie oraz ewolutę:

- $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$,
- $r(t) = (1 - \cos t, t - \sin t, 4 \sin \frac{t}{2})$,
- $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

Zadanie 4. Wykaż, że dla danej krzywej niezdegenerowanej (o krzywiznie różnej od zero w każdym punkcie) w przestrzeni trójwymiarowej następujące warunki są równoważne:

- wektory styczne tworzą stały kąt z pewnym kierunkiem,
- wektory binormalne tworzą stały kąt z pewnym kierunkiem,
- wektory normalne główne są równoległe do pewnej płaszczyzny,
- stosunek skręcenia do krzywizny jest stały.

Zadanie 5. Krzywa o parametryzacji naturalnej s ma krzywiznę $\kappa(s)$ i skręcenie $\tau(s)$, które się nie zerują. Wyznacz krzywiznę i skręcenie krzywej utworzonej w przestrzeni trójwymiarowej przez współrzędne wektora

- binormalnego,
- normalnego głównego,
- stycznego.

Zadanie 6. Znajdź ewolwentę okręgu.

Zadanie 7. Wykaż, że krzywa płaska i jej ewolwenta mają krzywizny tego samego znaku.

Zadanie 8. (*) Niech $r(t)$ będzie funkcją z obszaru w \mathbb{R}^1 do \mathbb{R}^1 taką, że $r'(t) \neq 0$. Szwarcjanem funkcji r w punkcie t nazywamy liczbę

$$\mathcal{S}(r)(t) = \left(\frac{r''}{2r'} \right)' - \left(\frac{r''}{2r'} \right)^2.$$

a) Niech w będzie dowolną funkcją wymierną. Wykaż, że

$$\mathcal{S}(r \circ w)(t) = \mathcal{S}(r)(w(t)).$$

b) Dla każdej liczby rzeczywistej κ znajdź taką funkcję r , że dla każdego t z obszaru określoności r zachodzi $\mathcal{S}(r)(t) = \kappa$.

c) Czy istnieje funkcja r na \mathbb{R} taka, że Szwarcjan jest stale równy ujemnej liczbie κ ?

d) Czy istnieje funkcja r taka, że Szwarcjan jest stale równy dodatniej liczbie κ , określona na całej prostej rzeczywistej?