

Geometria Różniczkowa I

Zadania domowe (seria VIII)

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli wszystkie proste normalne do powierzchni P przechodzą przez wspólny punkt, to P zawiera się w pewnej sferze.

Zadanie 2. Sprawdź, że przekształcenie

$$p(u, v) = \left((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v \right),$$

gdzie $u, v \in \mathbb{R}$, jest parametryzacją pewnej powierzchni, czyli sprawdź, że to przekształcenie jest regularne. Wyznacz punkty eliptyczne ($\kappa > 0$), hiperboliczne ($\kappa < 0$) i paraboliczne ($\kappa = 0$). Zbadaj, czy istnieją olimbiki (czyli punkty sferyczne, punkty, gdzie krzywizny główne są równe). Oblicz krzywiznę Gaussa w każdym punkcie: raz jako iloczyn krzywizn głównych, drugi raz jako iloraz wyznaczników obu form podstawowych.

Zadanie 3. Posługując się twierdzeniem, że dla każdego punktu P pewnej powierzchni riemannowskiej istnieje otoczenie punktu P takie, że dla każdego punktu Q z tego otoczenia istnieje jedyna najkrótsza krzywa łącząca punkty P i Q , wykaż, że dla półpłaszczyzny hiperbolicznej te najkrótsze krzywe zawierają się w okręgach lub prostych prostopadłych do osi x .

Geometria Różniczkowa I

Zadania domowe (seria VIII)

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli wszystkie proste normalne do powierzchni P przechodzą przez wspólny punkt, to P zawiera się w pewnej sferze.

Zadanie 2. Sprawdź, że przekształcenie

$$p(u, v) = \left((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v \right),$$

gdzie $u, v \in \mathbb{R}$, jest parametryzacją pewnej powierzchni, czyli sprawdź, że to przekształcenie jest regularne. Wyznacz punkty eliptyczne ($\kappa > 0$), hiperboliczne ($\kappa < 0$) i paraboliczne ($\kappa = 0$). Zbadaj, czy istnieją olimbiki (czyli punkty sferyczne, punkty, gdzie krzywizny główne są równe). Oblicz krzywiznę Gaussa w każdym punkcie: raz jako iloczyn krzywizn głównych, drugi raz jako iloraz wyznaczników obu form podstawowych.

Zadanie 3. Posługując się twierdzeniem, że dla każdego punktu P pewnej powierzchni riemannowskiej istnieje otoczenie punktu P takie, że dla każdego punktu Q z tego otoczenia istnieje jedyna najkrótsza krzywa łącząca punkty P i Q , wykaż, że dla półpłaszczyzny hiperbolicznej te najkrótsze krzywe zawierają się w okręgach lub prostych prostopadłych do osi x .

Geometria Różniczkowa I

Zadania domowe (seria VIII)

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli wszystkie proste normalne do powierzchni P przechodzą przez wspólny punkt, to P zawiera się w pewnej sferze.

Zadanie 2. Sprawdź, że przekształcenie

$$p(u, v) = \left((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v \right),$$

gdzie $u, v \in \mathbb{R}$, jest parametryzacją pewnej powierzchni, czyli sprawdź, że to przekształcenie jest regularne. Wyznacz punkty eliptyczne ($\kappa > 0$), hiperboliczne ($\kappa < 0$) i paraboliczne ($\kappa = 0$). Zbadaj, czy istnieją olimbiki (czyli punkty sferyczne, punkty, gdzie krzywizny główne są równe). Oblicz krzywiznę Gaussa w każdym punkcie: raz jako iloczyn krzywizn głównych, drugi raz jako iloraz wyznaczników obu form podstawowych.

Zadanie 3. Posługując się twierdzeniem, że dla każdego punktu P pewnej powierzchni riemannowskiej istnieje otoczenie punktu P takie, że dla każdego punktu Q z tego otoczenia istnieje jedyna najkrótsza krzywa łącząca punkty P i Q , wykaż, że dla półpłaszczyzny hiperbolicznej te najkrótsze krzywe zawierają się w okręgach lub prostych prostopadłych do osi x .