

Geometria Różniczkowa I

Zadania domowe (seria VI)

Zadanie 1. Znajdź I formę podstawową powierzchni w \mathbb{R}^3 o parametryzacji

$$p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v),$$

nazywanej helikoidą lub powierzchnią śrubową.

Zadanie 2. Na powierzchni riemannowskiej z metryką

$$g_{11}(u, v) = 1, g_{12}(u, v) = 0, g_{22}(u, v) = \frac{1}{u^2 + 1}$$

znajdź sumę kątów wewnętrznych trójkąta otworzonego przez linie

$$u = v, u = -v, v = -1.$$

Zadanie 3. Dane są dwie paraboloidy: hiperboliczna $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy\}$ i eliptyczna $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$. sprawdź, czy rzut $g : H \rightarrow E$ wzdłuż osi z jest

- przekształceniem wiernopowierzchniowym,
- przekształceniem wiernokątnym.

Zadanie 4. Niech H oznacza płaszczyznę Łobaczewskiego, tzn. $H = \{(x, y) : y > 0\}$ z metryką riemannowską $g_{11}(x, y) = g_{22}(x, y) = \frac{1}{y^2}, g_{12}(x, y) = 0$ i niech h będzie taką homografią płaszczyzny \mathbb{R}^2 , że $h(H) = H$. Udowodnij, że $h|_H : H \rightarrow H$ jest izometrią wewnętrzną. (Homografie płaszczyzny to przekształcenia, które w zapisie zespolonym mają postać $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ oraz $ad - bc \neq 0$).

Geometria Różniczkowa I

Zadania domowe (seria VI)

Zadanie 1. Znajdź I formę podstawową powierzchni w \mathbb{R}^3 o parametryzacji

$$p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v),$$

nazywanej helikoidą lub powierzchnią śrubową.

Zadanie 2. Na powierzchni riemannowskiej z metryką

$$g_{11}(u, v) = 1, g_{12}(u, v) = 0, g_{22}(u, v) = \frac{1}{u^2 + 1}$$

znajdź sumę kątów wewnętrznych trójkąta otworzonego przez linie

$$u = v, u = -v, v = -1.$$

Zadanie 3. Dane są dwie paraboloidy: hiperboliczna $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy\}$ i eliptyczna $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + Y^2\}$. sprawdź, czy rzut $g : H \rightarrow E$ wzdłuż osi z jest

- przekształceniem wiernopowierzchniowym,
- przekształceniem wiernokątnym.

Zadanie 4. Niech H oznacza płaszczyznę Łobaczewskiego, tzn. $H = \{(x, y) : y > 0\}$ z metryką riemannowską $g_{11}(x, y) = g_{22}(x, y) = \frac{1}{y^2}, g_{12}(x, y) = 0$ i niech h będzie taką homografią płaszczyzny \mathbb{R}^2 , że $h(H) = H$. Udowodnij, że $h|_H : \rightarrow H$ jest izometrią wewnętrzną. (Homografie płaszczyzny to przekształcenia, które w zapisie zespolonym mają postać $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ oraz $ad - bc \neq 0$).