Geometria Różniczkowa I

Kolokwium II (11 stycznia 2005, 14:15–15:45)

Zadanie 1. Powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ ma parametryzację: $p(u,v) = (u, v, 2u^2 + v^2)$, gdzie $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Określ, które jej punkty są eliptyczne, które paraboliczne, a które hiperboliczne. Zbadaj, czy istnieją ombiliki.

Zadanie 2. Zbadaj, czy w $\mathbb{R}^3$ powierzchnia o parametryzacji $p(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, gdzie $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, jest wewnętrznie izometryczna z płaszczyzną o parametryzacji $q(x,y) = (x, y, 0)$, gdzie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

Zadanie 3. Zbiór $P \subset \mathbb{R}^3$ jest sumą wszystkich prostych binormalnych do pewnej krzywej $K \subset \mathbb{R}^3$. Niech wszystkie te proste będą rozłączne. Sprawdź, że P jest powierzchnią i udowodnij, że K jest krzywą geodezyjną na P.

Zadanie 4. Dwie powierzchnie w $\mathbb{R}^3$ przecinaja się transwersalnie (czyli w punktach przecięcia płaszczyzny styczne są różne) wzdłuż krzywej, która jest geodezyjną na każdej z nich. Wykaż, że ta krzywa jest prostą.

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Czy istnieje powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ o ujemnej krzywiźnie Gaussa w każdym punkcie, homeomorficzna ze
a) sferą,
b) torusem,
c) preclem z dwoma dziurami,
d) nieskończonym walcem?

Geometria Różniczkowa I

Kolokwium II (11 stycznia 2005, 14:15–15:45)

Zadanie 1. Powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ ma parametryzację: $p(u,v) = (u, v, 2u^2 + v^2)$, gdzie $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Określ, które jej punkty są eliptyczne, które paraboliczne, a które hiperboliczne. Zbadaj, czy istnieją ombiliki.

Zadanie 2. Zbadaj, czy w $\mathbb{R}^3$ powierzchnia o parametryzacji $p(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, gdzie $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, jest wewnętrznie izometryczna z płaszczyzną o parametryzacji $q(x,y) = (x, y, 0)$, gdzie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

Zadanie 3. Zbiór $P \subset \mathbb{R}^3$ jest sumą wszystkich prostych binormalnych do pewnej krzywej $K \subset \mathbb{R}^3$. Niech wszystkie te proste będą rozłączne. Sprawdź, że P jest powierzchnią i udowodnij, że K jest krzywą geodezyjną na P.

Zadanie 4. Dwie powierzchnie w $\mathbb{R}^3$ przecinaja się transwersalnie (czyli w punktach przecięcia płaszczyzny styczne są różne) wzdłuż krzywej, która jest geodezyjną na każdej z nich. Wykaż, że ta krzywa jest prostą.

Zadanie 5. (nieobowiązkowe) Czy istnieje powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ o ujemnej krzywiźnie Gaussa w każdym punkcie, homeomorficzna ze
a) sferą,
b) torusem,
c) preclem z dwoma dziurami,
d) nieskończonym walcem?