Grupy Kleina

Zadania domowe (seria III)

Zadanie 1. Niech $\Gamma_k \subset \Gamma$ będzie podgrupą generowaną przez komutatory $[g_1, \ldots [g_{k-1}, g_k]]$, gdzie $g_j \in \Gamma$. Wykaż, że $\Gamma_j \subset \Gamma_{j-1}$. Wykaż, że $[\Gamma, \Gamma_{j-1}] \subset \Gamma_j$.

Zadanie 2. Wykaż, że każda dyskretna grupa izometrii $\mathbb{E}^n$ jest wirtualnie $\mathbb{Z}^n$.

Zadanie 3. Wykaż, że każda nietrywialna beztorsyjna nilpotenta grupa Kleina jest izomorficzna $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{Z}^2$.

Zadanie 4. Niech M będzie hiperboliczną rozmaitością wymiaru 3 o skończenie generowanej grupie podstawowej. Przypuśćmy, że $M_c \subset M$ jest zwartą podrozmaitością taką, że inkluzja jest homotopijną równoważnością. Wykaż, że jeśli ∂M_c składa się wyłącznie z torusów, to $\mathrm{vol}(M) < \infty$.