Grupy Kleina

Zadania domowe (seria X)

We wszystkich zadaniach d_h oznacza odległość w metryce hiperbolicznej.

Zadanie 1. Na płaszczyźnie hiperbolicznej dany jest trójkąt geodezyjny o miarach kątów α, β, γ i długościach przeciwległych boków a, b, c. Wykaż, że

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cosh c,$$

$$\cosh c = \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b\cos\gamma,$$

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}.$$

Zadanie 2. Niech $ABCD$ będzie geodezyjnym czworokątem włożonym w płaszczyznę hiperboliczną, którego miary kątów przy wierzchołkach A, B, D są równe $\frac{\pi}{2}$, a miara kąta przy C wynosi γ. Wykaż, że

$$\sinh d_h(A, B)\sinh d_h(A, D) = \cos\gamma.$$

Zadanie 3. Niech $ABCD$ będzie geodezyjnym czworokątem w $\mathbb{H}^n$, takim, że $|\angle ABC| \geqslant \frac{\pi}{2}$, $|\angle DAB| \geqslant \frac{\pi}{2}$, $|\angle ADC| \geqslant \frac{\pi}{2}$ oraz $d_h(D, A) \geqslant h$. Wykaż, że $\sinh d_h(A, B) \leqslant \frac{1}{\sinh h}$.

Zadanie 4. Niech Q_1, Q_2 będą dwoma rozłącznymi wypukłymi domkniętymi podzbiorami $\mathbb{H}^n$. Wykaż, że średnica rzutu Q_1 na Q_2 jest $\leqslant \frac{2}{\sinh d_h(Q_1,Q_2)}$.

Zadanie 5. Niech $O_nA_nB_n$ będzie ciągiem trójkątów geodezyjnych w $\mathbb{H}^n$ takich, że $d_h(O_n, A_n) = n$ oraz $d_h(A_n, B_n) = o(n)$ dla $n \to \infty$. Wykaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N, że dla każdego $n > N$ istnieją punkty $A'_n \in \overline{O_nA_n}, B'_n \in \overline{O_nB_n}$ takie, że $d_h(A'_n, B'_n) \leqslant \varepsilon$ oraz $d_h(A_n, A'_n) = o(n) = d_h(B_n, B'_n)$ dla $n \to \infty$.

Zadanie 6. Niech $A_nB_nC_nD_n$ będzie ciągiem geodezyjnych czworokątów w $\mathbb{H}^n$ takich, że $d_h(A_n, B_n) = d_h(C_n, D_n) = n$ oraz $d_h(B_n, C_n) = o(n) = d_h(A_n, D_n)$ dla $n \to \infty$. Wykaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N, że dla $n > N$ istnieją punkty $A'_n, B'_n \in \overline{A_nB_n},\ C'_n, D'_n \in \overline{C_n, D_n}$ takie, że

$$d_h(A'_n, D'_n) \leqslant \varepsilon,\ d_h(B'_n, C'_n) \leqslant \varepsilon,\ d_h(D'_n, C'_n) \sim d_h(A'_n, B'_n) \sim n$$

dla $n \to \infty$. Ponadto odległość Hausdorffa między $\overline{A'_nB'_n}$, a $\overline{C'_nD'_n}$ jest nie większa niż ε.

Zadanie 7. Udowodnij punkt (2) twierdzenia o zbieżności do działania na drzewie dla g takich, że ω–prawie wszystkie $\rho_i(g)$ są eliptyczne lub paraboliczne.

Zadanie 8. Dla ciągu (X_n, x_n) zbazowanych przestrzeni CAT(0) i ultrafiltru ω rozważmy stożek asymptotyczny $(X, x) = \omega\text{–}\lim_n(X_n, x_n)$. Niech $Y_n \subset X_n$ będą domkniętymi wypukłymi podzbiorami takimi, że $\omega\text{–}\lim_n d_n(x_n, Y_n) = \infty$. Wykaż, że $\beta = \omega\text{–}\lim_n d_n(Y_n, \cdot) - d_n(Y_n, x_n)$ jest funkcją Busemanna na X, tzn. istnieje geodezyjny promień $r\colon [0, \infty) \to X$ taki, że $\beta = \lim_{t\to\infty} d(r(t), \cdot) - t$.