3-Rozmaitości

Celem kursu jest wprowadzenie podstawowych pojęć i omówienie głównych własności rozmaitości topologicznych wymiaru 3. Na rozmaitość będziemy patrzeć pod kątem jej grupy podstawowej i jej geometrii. W szczególności wytłumaczymy w jaki sposób geometrycznie skończone grupy Kleina prowadzą do pojęcia grupy hiperbolicznej w sensie Gromowa. Omówimy także wyniki Thurstona o hiperbolizacji 3-rozmaitości i klasyfikacji automorfizmów powierzchni.

Zakładamy znajomość pojęcia grupy podstawowej przestrzeni topologicznej oraz pojęcia rozmaitości. Na pierwszych ćwiczeniach zrobimy wprowadzenie/powtórzenie podstawowych własności płaszczyzny i przestrzeni hiperbolicznej.

W pierwszych wykładach powiemy o rozkładzie rozmaitości na czynniki pierwsze, który odpowiada rozkładowi grupy podstawowej w produkt wolny. Omówimy pojęcie powierzchni nieściesnialnej i pokażemy, używając twierdzenia o pętli, że algebraicznie oznacza ona włożenie grup podstawowych. Wprowadzimy także rozkład wzdłuż nieściesnialnych torusów na rozmaitości Seiferta i atoroidalne. W tej części będziemy posługiwać się książką Allena Hatchera.

Następnie, za książką Thurstona, omówimy przykłady rozmaitości niosących każdą z 8 geometrii modelowych. Nacisk położymy na rozmaitości hiperboliczne, stowarzyszone grupy Coxetera oraz węzły.

Omówimy działanie grupy podstawowej rozmaitości hiperbolicznej (i.e. grupy Kleina) na przestrzeni hiperbolicznej i jej brzegu w nieskończoności. Wprowadzimy pojęcie zbioru granicznego i dziedziny nieciągłości. Podamy przykłady grup geometrycznie skończonych. Opiszemy "cienką" część rozmaitości hiperbolicznej i opiszemy grupy Kleina jako prototyp grup hiperbolicznych w sensie Gromowa i relatywnie hiperbolicznych. Materiał według Mardena.

Wreszcie udowodnimy twierdzenie Mostowa o sztywności (wg. Roe): grupa podstawowa zamkniętej rozmaitości hiperbolicznej wyznacza ją z dokładnością do izometrii.

Opiszemy związek hiperboliczych wiązek wymiaru 3 z automorfizmami powierzchni. Podamy klasyfikację tych automorfizmów oraz rolę przestrzeni Teichmullera oraz foliacji i laminacji (Casson-Bleiler).

Zakończymy wprowadzeniem do grup quasi-Fuchsa i hiperbolizacji Thurstona.