

3–Rozmaitości

Zadania przygotowawcze do drugiego kolokwium

Zadanie 1. Niech M będzie przestrzenią otrzymaną ze sklejenia przeciwległych ścian sześcianu obrotem o $\frac{\pi}{2}$. Wykaż, że M jest rozmaitością i skonstruuj na niej geometrię.

Zadanie 2. Niech M będzie przestrzenią otrzymaną ze sklejenia przeciwległych ścian dwudziestościanu obrotem o $\frac{\pi}{3}$. Czy M jest rozmaitością?

Zadanie 3. Niech P będzie hiperbolicznym dwunastościanem regularnym o wszystkich kątach dwuściennych prostych (wykaż, że taki P istnieje). Skonstruuj rozmaitość hiperboliczną ze sklejenia kilku kopii P .

Zadanie 4. Niech M będzie rozmaitością powstałą ze sklejenia $T^2 \times [0, 1]$ odwzorowaniem $(x, 0) \sim (Ax, 1)$, gdzie $x \in T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ oraz

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zrealizuj $\pi_1(M)$ jako grupę izometrii jednej z geometrii modelowych.

Zadanie 5 (*). Wykaż, że rozmaitość M z zadania 3 z listy 5 jest sferą Poincarégo.

Zadanie 6. Utożsamiamy S^3 ze sferą kwaternionów $a + bi + cj + dk$ jednostkowych: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Wykaż, że odwzorowanie $S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ przypisujące parze $g, h \in S^3$ izometrię $x \rightarrow gxh^{-1}$ jest na i 2–1.

Zadanie 7. Wykaż, że dla dowolnej pary trójek punktów brzegu płaszczyzny lub przestrzeni hiperbolicznej istnieje izometria przekształcająca jedną trójkę na drugą.

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli podgrupa grupy izometrii $\mathbf{H}^3$ zawiera dwa elementy paraboliczne o różnych punktach stałych, to zawiera także element hiperboliczny.

Zadanie 9 (*). Wykaż, że dowolna grupa Kleina składająca się tylko z elementów eliptycznych zachowuje punkt i wobec tego jest skończona.

Zadanie 10. Wykorzystując poprzednie zadania wykaż, że dla nieelementarnej grupy Kleina Γ zbiór graniczny $\Lambda(\Gamma)$ jest domknięciem zbioru końców osi elementów hiperbolicznych (lub stałych punktów parabolicznych, o ile istnieją).

Zadanie 11. Wykaż, że grupa Kleina o zbiorze granicznym zawartym w $\partial\mathbf{H}^2 \subset \partial\mathbf{H}^3$ jest grupą indeksu 2 w grupie Fuchsa lub grupą elementarną.

Zadanie 12. Niech Γ będzie nieelementarną grupą Kleina. Wykaż, że dla dwóch zbiorów otwartych w $\partial\mathbf{H}^3$ przecinających $\Lambda(\Gamma)$ istnieje w Γ element hiperboliczny którego końce osi leżą w tych zbiorach.