3–**Rozmaitości**

Zadania przygotowawcze do pierwszego kolokwium

O ile nie powiedziano inaczej, wszystkie rozmaitości są spójne, zwarte i orientowalne.

Zadanie 1. Niech Σ będzie orientowalną powierzchnią z jedną składową brzegu. Niech M będzie 3–rozmaitościa otrzymaną ze sklejenia $\Sigma \times S^1$ z $D^2 \times S^1$ odwzorowaniem na brzegu które utożsamia czynnik $\partial\Sigma$ z S^1 a czynnik S^1 z ∂D^2. Znajdź rozkład M w sumę spójną rozmaitości pierwszych.

Zadanie 2. Wykaż, że w pierwszej 3–rozmaitości M z nieścieśnialną powierzchnią Σ, dla każdego włożonego dysku $h\colon D \to M$ o własności $h(D) \cap \Sigma = h(\partial D)$ istnieje homotopia $H\colon D \times I \to M$ taka, że $H(\cdot, 0) = h,\ H(\cdot, 1) \subset \Sigma$ oraz H jest stała na $(x, \cdot)$ dla każdego $x \in \partial D$.

Zadanie 3. Wykaż, że 3–rozmaitość jest ściągalna wtedy i tylko wtedy kiedy jest jednospójna i ma brzeg S^2.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli zwarta podrozmaitość $\mathbf{R}^3$ ma $H_1(M, \mathbf{Z}) = 0$, to $\pi_1(M) = 0$.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli być może niezwarta 3–rozmaitość M jest jednospójna, to każdy okrąg w ∂M rozspójnia ∂M.

Zadanie 6. Wykaż, że 3–rozmaitość bez brzegu ma wolną grupę podstawową wtedy i tylko wtedy kiedy jest sumą spójną $S^2 \times S^1$ i sfer homotopijnych (nie zakładając hipotezy Poincarégo).

Zadanie 7. Wykaż, że jednodnostronna (nieorientowalna) powierzchnia Σ w orientowalnej 3–rozmaitości M indukuje włożenie $\pi_1(\Sigma) \to \pi_1(M)$ wtedy i tylko wtedy kiedy brzeg Λ tubularnego otoczenia Σ jest powierzchnią nieściśnialną.

Zadanie 8. Rozważ orbifold $\theta = (\Sigma, X)$, gdzie Σ jest sferą, a X składa się z trzech punktów o krotnościach $2, 3, 3$. Oblicz $\chi(\theta)$. Wykaż, że $\pi_1(\theta) = A_4$ (parzyste permutacje zbioru 4–elementowego).

Zadanie 9. Rozważ orbifold $\theta = (\Sigma, X)$, gdzie Σ jest sferą, a X składa się z trzech punktów o krotnościach $3, 3, 3$. Oblicz $\chi(\theta)$. Wykaż, że $\pi_1(\theta)$ zawiera podgrupę skończonego indeksu izomorficzną z $\mathbf{Z}^2$.

Zadanie 10. Wykaż, że następujące grafy są izomorficzne.

1. Zbiór wierzchołków V_1 jest zbiorem nieściągalnych krzywych zamkniętych bez samoprzecięć na torusie, z dokładnością do homotopii. Zbiór krawędzi E_1 składa się z par klas w V_1, które można reprezentować parą krzywych przecinających się dokładnie raz.

2. Zbiór wierzchołków V_2 składa się z nieskracalnych ułamków $\frac{p}{q}$ oraz z $\infty = \frac{1}{0}$. Zbiór krawędzi E_2 składa się z par $\{\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\}$ takich, że $|pq' - p'q| = 1$.

3. Graf (V_3, E_3) jest 1–szkieletem jedynej triangulacji $\mathbf{H}^2$ trójkątami idealnymi.

Ten graf nosi nazwę *grafu Fareya*.