3–**Rozmaitości, lista 7**

Zadanie 1. Niech Γ będzie nieelementarną grupą Kleina. Wykaż, że zbiór graniczny $\Lambda(\Gamma)$ nie ma punktów izolowanych.

Zadanie 2. Niech Γ będzie nieelementarną grupą Kleina. Wykaż, że jeśli $\Gamma_0 \subset \Gamma$ jest podgrupą skończonego indeksu lub podgrupą normalną, to $\Lambda(\Gamma_0) = \Lambda(\Gamma)$.

Zadanie 3. Niech γ będzie przekształceniem Möbiusowym kuli jednostkowej w $\mathbf{R}^3$ nie zachowującym 0. Oznaczmy

$$\begin{aligned} K(\gamma) &= \{x \in \mathbf{R}^3 \colon |\gamma'(x)| = 1\} \\ I(\gamma) &= \{x \in \mathbf{R}^3 \colon |\gamma'(x)| > 1\} \\ E(\gamma) &= \{x \in \mathbf{R}^3 \colon |\gamma'(x)| < 1\}. \end{aligned}$$

1. Wykaż, że $K(\gamma)$ jest sferą ortogonalną do brzegu kuli jednostkowej.
2. Wykaż, że γ przekształca $I(\gamma)$ na $E(\gamma^{-1})$ a $E(\gamma)$ na $I(\gamma^{-1})$.
3. Wykaż, że dla nieskończonego ciągu elementów γ_n grupy Kleina Γ zachodzi $\operatorname{diam}(I(\gamma_n)) \to 0$.

Zadanie 4. Wykaż, że grupa podstawowa powierzchni hiperbolicznej o skończonej objętości działa na $\mathbf{H}^2$ jako grupa Fuchsa pierwszego rodzaju, tzn. $\Lambda(\Gamma) = S^1$.