3–Rozmaitości, lista 6

Nil-geometria

Zadanie 1. Znajdź ogólny wzór na elementy grupy G nil-geometrii.

Zadanie 2. Wykaż, że wszystkie zwarte rozmaitości niosące nil-geometrię są Seiferta. Wykaż, że $e \neq 0$.

Geometria hiperboliczna

Definicja. *Geometrią hiperboliczną* (G, X) w wymiarze n nazywamy parę $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | \, x_n > 0\}$ gdzie G jest grupą przekształceń Möbiusowych X i.e. grupą generowaną przez odbicia i inwersje w hiperprzestrzeniach i hipersferach ortogonalnych do ∂X.

Zadanie 3. Wykaż, że w wymiarze 2 podgrupę G przekształceń zachowujących orientację można utożsamiać z $PSL(2, \mathbf{R})$.

Zadanie 4. Wykaż, że w wymiarze 3 podgrupę G przekształceń zachowujących orientację można utożsamiać z $PSL(2, \mathbf{C})$.

Zadanie 5. Wykaż, że każdy element G jest dokładnie jednego z następujących typów:

1. *eliptyczny*: zachowujący punkt w X,
2. *paraboliczny*: sprzężony z $(x_1, \ldots, x_n) \to (I(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, gdzie $I \in \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^{n-1})$ bez punktów stałych,
3. *hiperboliczny*: sprzężony z $(x_1, \ldots, x_n) \to \lambda(I(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, gdzie $I \in O(n-1)$ jest elementem grupy ortogonalnej przestrzeni $\mathbf{R}^{n-1} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ oraz $\lambda > 1$.

Zadanie 6. Niech $\Gamma \subset G$ działa właściwie i kozwarcie na X. Wykaż, że G nie zawiera $\mathbf{Z}^2$.

Zadanie 7. Niech $\Gamma \subset G$ działa właściwie i kozwarcie na X. Wykaż, że G nie zawiera nietrywialnej normalnej podgrupy abelowej.

Geometria $\widetilde{PSL(2, \mathbf{R})}$

Zadanie 8. Wykaż, że kozwarta podgrupa $PSL(2, \mathbf{R})$ nie podnosi się do $\widetilde{PSL(2, \mathbf{R})}$.