第5卷 第4期
1992年 10月

应用数学
MATHEMATICA APPLICATA

Vol. 5 No. 4
October 1992

具有非局部边值约束的中子迁移问题单调衰减解*

梅 茗　　　　肖应昆

(华东地质学院 抚州 344000)　(江西师范大学 南昌 330027)

中子迁移方程是核动力学中描述中子的分布过程.[1-6] 本文讨论具有非局部边值约束的含任意空穴的非均匀介质中具连续能量的中子迁移系统

$$N_t + v\cdot\nabla_x N + \sigma(x,v)N = \int_{D_2} k(x,v,v')N(t,x,v')\mathrm{d}v',\ \text{in } E_T; \tag{1}$$

$$N(0,x,v) = N_0(x,v),\quad \text{on } \Gamma_0; \tag{2}$$

$$N(t,x,v) = \int_{D_1} f(x,y)N(t,y,v)\mathrm{d}y,\quad \text{on } \Gamma, \tag{3}$$

其中 D_1 是 R^3 中含任意空穴的有界凸区域,且其边界 ∂D_1 分片光滑,D_2 是 R^3 中有界可测集,$v\cdot\nabla_x N=\sum_{i=1}^{3} v_i\cdot\dfrac{\partial N}{\partial x_i}$,$N(t,x,v)$表示位于 $x=(x_1,x_2,x_3)$处,具有速度 $v=(v_1,v_2,v_3)$在时刻 t 的中子分布密度.$N_0(x,v)$是初始分布,$\sigma(x,v)$表示含任意空穴的非均匀介质的总截面,$k(x,v,v')$是能量迁移核,$f(x,y)$是边界约束函数,σ、k、N_0、f 均为非负连续有界函数.另记

$$E_T=\{(t,x,v)\,|\,0<t\leqslant T,\forall\ T>0,x\in D_1,v\in D_2\},$$
$$\Gamma_0=\{(t,x,v)\,|\,t=0,x\in D_1,v\in D_2\},$$
$$\Gamma=\{(t,x,v)\,|\,0<t\leqslant T,x\in\partial D_1,n\cdot v<0,v\in D_2\}.$$

本文基本假设为

(A) $\displaystyle\min_{D_1\times D_2}\{\sigma(x,v)-\int_{D_2}k(x,v,v')\mathrm{d}v'\}>0,$

(B) $\displaystyle\int_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}y\leqslant\rho<1,\forall\ x\in\partial D_1.$

本文将证明问题(1)-(3)存在唯一古典解,且其解具有以指数形式单调衰减的渐近性.

定理1 问题(1)-(3)存在唯一的非负整体古典解.

证明 构造一个迭代序列$\{N_m(t,x,v)\}$

(Ⅰ) $N_0(t,x,v)=N_0(x,v)\geqslant 0$;

* 国家自然科学基金、江西省自然科学基金资助项目.
收稿日期:1989-01-17 修订日期:1990-02-25

(Ⅱ) 对于给定$N_m(t,x,v)\geqslant 0$,令

$$\overline{N}_{m+1}=\int_{D_1}f(x,y)N_m(t,y,v)\mathrm{d}y\geqslant 0,x\in\partial D_1,$$

于是构造N_{m+1}为下述线性局部问题的解:

$$\partial N_{m+1}/\partial t+v\cdot\nabla_x N_{m+1}+\sigma(x,v)N_{m+1}=\int_{D_2}k(x,v,v')N_{m+1}(t,x,v')\mathrm{d}v',\tag{4}$$

$$N_{m+1}(0,x,v)=N_0(x,v),\quad \text{on }\Gamma_0,\tag{5}$$

$$N_{m+1}(t,x,v)=\overline{N}_{m+1}(t,x,v),\quad \text{on }\Gamma,\tag{6}$$

线性问题(4)-(6)存在唯一非负古典解[2]~[4]．于是

$$\frac{\partial(N_{m+1}-N_m)}{\partial t}+v\cdot\nabla_x(N_{m+1}-N_m)+\sigma(x,v)(N_{m+1}-N_m)$$

$$=\int_{D_2}k(x,v,v')(N_{m+1}-N_m)\mathrm{d}v',\quad \text{in }E_T,\tag{7}$$

$$(N_{m+1}-N_m)(0,x,v)=0,\quad \text{on }\Gamma_0\tag{8}$$

$$(N_{m+1}-N_m)(t,x,v)=\int_{D_1}f(x,y)(N_m-N_{m-1})(t,y,v)\mathrm{d}y,\quad \text{on }\Gamma,\tag{9}$$

对方程(7)—(9)应用极值原理[5,6]及条件(B)得到

$$\begin{aligned}\sup_{E_T}|N_{m+1}-N_m|&\leqslant\sup_{\Gamma+\Gamma_0}|N_{m+1}-N_m|\\&=\sup_{\Gamma}\left|\int_{D_1}f(x,y)(N_m-N_{m-1})(t,y,v)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\rho\cdot\sup_{E_T}|N_m-N_{m-1}|.\end{aligned}\tag{10}$$

即　$\sup\limits_{E_T}|N_{m+1}-N_m|\leqslant C\rho^m$,　$(C=\sup\limits_{E_T}|N_1-N_0|)$.

可知$\{N_m\}$为$C(E_\infty)$中Cauchy序列,从而存在$N(t,x,v)\in C(E_\infty)$,使得$N=\lim\limits_{m\to\infty}N_m$.另外,由方程(7)本身,并注意到$\sigma$、$k$的有界性,得到

$$\begin{aligned}&\sup_{E_T}|(\partial/\partial t+v\cdot\nabla_x)(N_{m+1}-N_m)|\\&\leqslant M\cdot\sup_{E_T}|N_{m+1}-N_m|,\left(M=\sup_{E_\infty}\left\{\sigma+\int_{D_2}k(x,v,v')\mathrm{d}v'\right\}\right)\\&\leqslant CM\cdot\rho^m,\end{aligned}$$

从而$(\partial/\partial t+v\cdot\nabla_x)(N_{m+1}-N_m)$一致地收敛于零,故$(\partial/\partial t+v\cdot\nabla_x)N$存在且连续,并易知$N(t,x,v)$满足方程(1)—(3).即证明了$N(t,x,v)$为(1)—(3)的非负整体古典解．此外,从(10)式中易得解的唯一性．

定理2　解$N(t,x,v)$在$C(\overline{D}_1\times\overline{D}_2)$意义下关于$t$是单调递减的,即

$$N(t)=\max_{(\overline{D}_1\times\overline{D}_2)}N(t,x,v)$$

是t的单调递减函数．

证明　若结论不真,即存在$t_0>0$及$\varepsilon_m\downarrow 0,\delta_m\downarrow 0$,使得

$$\delta_m+\max_{\overline{D}_1\times\overline{D}_2}N(t_0,x,v)<\max_{\overline{D}_1\times\overline{D}_2}N(t_0+\varepsilon_m,x,v).\tag{11}$$

选取 x_m 及 v_m,使得

$$N(t_0+\varepsilon_m,x_m,v_m)>\max_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2}N(t_0+\varepsilon_m,x,v)-\delta_m,\tag{12}$$

则由(11),得

$$N(t_0+\varepsilon_m,x_m,v_m)>\max_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2}N(t_0,x,v).\tag{13}$$

在区域 $D_1\times D_2\times(t_0,t_0+\varepsilon_m)$ 上应用极值原理[5,6] 及关系式(13),可知存在 $y_m\in\partial D_1,u_m\in D_2,u_m\cdot n<0,\bar{\varepsilon}_m\in(0,\varepsilon_m)$,使得

$$N(t_0+\varepsilon_m,x_m,v_m)<N(t_0+\bar{\varepsilon}_m,y_m,u_m).\tag{14}$$

再由边界条件(3)、基本假设(B)及 $N(t,x,v)$ 关于 t 的连续性,可得

$$\begin{aligned}N(t_0+\bar{\varepsilon}_m,y_m,u_m)&\leqslant\int_{D_1}f(y_m,x)[\max_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2}N(t_0+\bar{\varepsilon}_m,x,v)]\mathrm{d}x\\&\leqslant\rho\{\max_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2}N(t_0,x,v)+\eta_m\},\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $\eta_m\to0$. 由(13)－(15),得

$$N(t_0+\varepsilon_m,x_m,v_m)\leqslant\rho N(t_0+\varepsilon_m,x_m,v_m)+\eta_m,\tag{16}$$

即

$$(1-\rho)N(t_0+\varepsilon_m,x_m,v_m)\leqslant\eta_m.\tag{17}$$

当 $m\to\infty$ 时,并由(13)式得到

$$N(t_0,x,v)\equiv0,\quad\forall\ (x,v)\in\bar{D}_1\times\bar{D}_2.\tag{18}$$

当 $t>t_0$ 时,类似于定理 1 的证明,可证

$$\sup_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2\times[t_0,\infty)}N(t,x,v)\leqslant\rho\sup_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2\times[t_0,\infty)}N(t,x,v),\tag{19}$$

即
$$N(t,x,v)\equiv0,\quad\forall\ t\geqslant t_0,\quad(x,v)\in\bar{D}_1\times\bar{D}_2,$$

这与假设(11)相矛盾! 故定理 2 成立.

定理 3　问题(1)－(3)的解满足

$$N(t)\leqslant M_0e^{-rt},\quad\forall\ t>0,\tag{20}$$

其中
$$M_0=\max_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2}N_0(x,v),\quad0<r\leqslant\min_{\bar{D}_1\times\bar{D}_2}\left\{\sigma(x,v)-\int_{D_2}k(x,v,v')\mathrm{d}v'\right\}.$$

证明　记 $W(t,x,v)=N(t,x,v)e^{rt}$, (21)

则 $W(t,x,v)$ 满足

$$\frac{\partial W}{\partial t}+v\cdot\nabla_xW+(\sigma(x,v)-r)W=\int_{D_2}k(x,v,v')W(t,x,v')\mathrm{d}v',$$
$$(t,x,v)\in E_T,\tag{22}$$

$$W(0,x,v)=N_0(x,v),\quad(t,x,v)\in\Gamma_0,\tag{23}$$

$$W(t,x,v)=\int_{D_1}f(x,y)W(t,y,v)\mathrm{d}y,\quad(t,x,v)\in\Gamma.\tag{24}$$

由定理 1 知(22)－(24)存在唯一一个古典解 $W(t,x,v)$. 同于定理 1 的处理手法,可构造出一个一致收敛的 Cauchy 序列 $\{W_m(t,x,v)\}$,收敛于 $W(t,x,v)$,且由 $W_m(t,x,v)$ 的极值原理[5,6] ,易知

$$|W_m(t,x,v)|\leqslant M_0,\quad(t,x,v)\in\bar{E}_\infty,$$

从而
$$0 \leqslant W(t,x,v) \leqslant M_0, \quad (t,x,v) \in \overline{E}_\infty.$$
注意到(21)式，立即得到
$$N(t,x,v) \leqslant M_0 e^{-rt}, \quad t > 0.$$

参　考　文　献

1 Larsen E W. Bounds and Maximum Principles for the Solution of the Linear Transport Equation. SIAM J. Math Anal. ,1981,12: 282～292

2 Pao C V. Solution of a Nonlinear Boltzmann Equation for Neutron Transport in L_1 space. Arch. Rational Mech. Anal,1973,50: 290～302

3 Pao C V. Positive Solutions and the Criticality of the Linear and some Nonlinear Transport Problems. SIAM J. Appl. Math. 1977,32: 164～176

4 肖应昆，陈苏芸．含任意空穴的非均匀介质中具连续能量的中子迁移问题，江西师大学报(自)，1985,4:1～6

5 肖应昆．与时间有关的线性迁移方程的非负解的极值原理．江西师大学报(自)，1984,2: 4～8

6 梅茗．Maxwell-Boltzmann 方程非负解的极值原理和渐近性质．数学杂志，1990,10(3): 341～348

梅茗，男，28岁，讲师，研究方向：非线性偏微分方程．

肖应昆，男，58岁，教授，研究方向：非线性偏微分方程．

模糊数学与模糊系统委员会第六届年会隆重举行

在世界各国掀起模糊热，各类模糊产品不断投放市场之际；在我国的模糊集理论与应用研究正处于兴旺发达的关键之时，中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会第六届年会于 1992 年 8 月 10 日～16 日在黄山市隆重召开。来自全国各地的 207 位代表出席了这次盛会。

这次年会共收到应征论文 280 余篇，内容包括模糊拓扑、模糊分析、模糊代数、模糊逻辑、模糊测度等方面的最新研究，及模糊集理论在人工智能、控制工程、神经网络、环境工程、地震工程、农业、医学、预测决策等方向的可喜成果，反映出我国模糊数学研究方兴未艾的大好形势。会议的 8 篇大会报告，内容涉及模糊逻辑与人工智能、模糊推理机、雷达目标识别、中介逻辑、模糊拓扑线性空间、地震预报、模糊控制器、国外模糊产品概况等，引起了与会者广泛的兴趣。各分组会议进行得热烈活跃，对许多学术问题及各种观点作了充分的探讨。

淮南矿业学院的同志为这次年会的顺利召开及年会议文集的及时出版付出了大量的辛勤劳动。会议暂定下届年会将于 1994 年在山西五台山或河北承德举行。

（许淳熙）