第8卷第1期　　高 校 应 用 数 学 学 报　　Vol. 8 No. 1
1993 年 3 月　　Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities　　Mar. 1993

高维非线性四阶抛物型方程初值问题全局解*

黄福英　　梅　茗

（华东地质学院）

摘　要

对一类高维非线性四阶抛物型方程初值问题，在初始数据适当小及非线性项适当光滑的情况下，获得了其古典解全局存在性.

关键词　四阶抛物型方程，Cauchy 问题，全局解，存在唯一性.

一、引　　言

本文讨论一类非线性高维四阶抛物型方程 Cauchy 问题的整体存在唯一性.

$$\triangle_t^2 u=(\triangle_t u)^{\alpha/(1+\alpha)}F(u,D_x u,\triangle_t u,D_x(\triangle_t u)),\quad (x,t)\in \mathbf{R}^n\times \mathbf{R}_+,\tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \triangle_t u|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in \mathbf{R}^n,\tag{2}$$

其中 $\triangle_t$ 是热传导算子，即 $\triangle_t=\dfrac{\partial}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，$\triangle_t^2$ 表示 $\triangle_t$ 的两次作用，$\alpha>0$ 为常数，且 $n\alpha>2$，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 均为正的连续可微函数，F 是一阶连续可微函数，$\mathbf{R}^n$ 为 n 维的 Euclid 空间，$\mathbf{R}_+=\{t\in R\,|\,t>0\}$. 对方程(1)而言，$\triangle_t u>0$ 是使得方程(1)有意义的先决条件，关于该条件的合理性，即我们所寻求的方程(1)满足条件(2)之解 u 的确也满足 $\triangle_t u>0$，这将在本文的第二节中加以讨论. 另外，非线性函数 F 为

$$\begin{aligned}F(u,D_x u,\triangle_t u,D_x(\triangle_t u))=&(1+\alpha)f(u,D_x u,\triangle_t u,D_x((\triangle_t u)^{1/(1+\alpha)}))\\&-\frac{\alpha}{1+\alpha}(\triangle_t u)^{-(1+2\alpha)/(1+\alpha)}(D_x(\triangle_t u))^2,\end{aligned}\tag{3}$$

---

* 本文1989年10月10日收到，1991年7月16日收到修改稿.
国家自然科学基金、江西省自然科学基金资助.

f 是非线性函数，且满足

(H_1) $f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)\in C^{1+\alpha}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$，且当 $|\xi|+|\zeta|+|\eta|+|\varepsilon|=0$ 时，有

$$f(0,0,0,0)=f_\xi(0,0,0,0)=D_\zeta f(0,0,0,0)=D_\varepsilon f(0,0,0,0)=0, \tag{4}$$

而当 $|\xi|+|\zeta|+|\eta|+|\varepsilon|>0$ 时，有

$$f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)>0, \tag{5}$$

初始数据 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 满足

(H_2) $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^1(R^n),\ \varphi(x)>0,\ \psi(x)>0.$

文[3]曾研究了具有耗散条件的非线性项 F 的一类非线性四阶抛物方程 Cauchy 问题的整体光滑解. 文[5]在具有一致 Lip 连续的适当光滑函数 F 的情况下对方程(1)进行了讨论，其方法是类似于二阶情形抛物方程的 Schauder 估计方法. 本文在非线性函数 f 适当光滑($C^{1+\alpha}$ 光滑)情况下，用 H. Fujita[1]、梅茗[2]中的方法，证明了高维情形小初值问题(1)、(2)非负古典解全局存在性.

值得指出的两点是：其一，我们只能对高维情形($n>\frac{2}{\alpha}$)才能得到问题(1)、(2)的全局解(在 H_1、H_2 的假设下)，且 $\frac{2}{\alpha}$ 是空间维数最佳限制，关于这点，将在本文第四节中加以说明，即在(H_1)、(H_2)下对于低维情形($0<n<\frac{2}{\alpha}$)，问题(1)、(2)可能不存在整体解而会在有限时刻发生 blow-up；其二，非线性函数 F 看起来十分特殊，其实，它有一定的实际背景，是一类简单四阶抛物方程 Cauchy 问题(特别是一类半线性二阶抛物方程组)更为一般形式的描述，这也将在第四节中给出说明.

二、辅助定理

首先，我们引入新的变量 $v=(\triangle_t u)^{1/(1+\alpha)}$，于是，可把非线性四阶抛物方程组 Cauchy 问题(1)、(2)转化为下述等价的二阶抛物型方程组初值问题

$$\begin{cases}u_t-\triangle u=v^{1+\alpha},\\ v_t-\triangle v=f(u,D_xu,v^{1+\alpha},D_xv), \qquad (x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\\ t=0,u=\varphi(x),v=[\psi(x)]^{1/(1+\alpha)},\end{cases} \tag{6}$$

进而，可把问题(1)、(2)化为下述等价的非线性耦合 Volterra-Fredholm 积分方程组[4]

$$\begin{cases}u(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)v^{1+\alpha}(\xi,\tau)d\xi,\\ v(x,t)=v_0(x,t)+\int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)f(u,D_xu,v^{1+\alpha},D_xv)(\xi,\tau)d\xi,\end{cases} \tag{7}$$

其中 $E(x,t)$ 是热传导方程基本解，即

$$E(x,t)=(4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/4t),\quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^n,$$

$u_0(x,t),v_0(x,t)$ 分别为

$$u_0(x,t)=\int_{R^n}E(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \tag{8}$$

$$v_0(x,t)=\int_{R^n}E(x-\xi,t)\psi^{1/(1+\alpha)}(\xi)d\xi. \tag{9}$$

如果方程组(6)存在唯一解的话,由(H_1)中(5)及(H_2)不难知道该解为正,且$\triangle_t u>0$,从而回答了我们所寻求的问题(1)、(2)解确实满足$\triangle_t u>0$的事实.我们有

引理 1 设(u,v)为问题(6)的唯一解,且成立(5)及(H_2),则(u,v)为一对正解,从而$\triangle_t u>0$.

证明 由(6)的等价积分方程组(7),并注意到(5)及(H_2),立即得到引理之结论.

下面,我们要寻求方程组(6)的唯一全局古典解,亦即寻求积分方程组(7)的唯一全局古典解,这是本文的主要目的.为此,先给出一个适当的光滑函数空间以及一些辅助定理.

定义 1 设B为一个连续函数的集合

$$\{(u,v)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\,|\,(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\}$$

其中(u,v)满足:

(i) $u(x,t),v(x,t)$一阶连续可微,

(ii) $|u(x,t)|,|v(x,t)|,|D_x u(x,t)|,|D_x v(x,t)|\leqslant M\cdot E(x,t+r)$, $(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$,其中$r>0$为给定的常数,$M>0$是可依赖于$(u,v)$的常数,

(iii) B中引入范数

$$\|(u,v)\|_B=\sup_{(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+}\left\{\frac{|u(x,t)|+|v(x,t)|+|D_x u(x,t)|+|D_x v(x,t)|}{E(x,t+r)}\right\},$$

显然B是一个Banach 空间.

引理 2[1,2] 设$n\alpha>2$,则有

$$\int_{R^n}E(x-\xi,t)E(\xi,r)d\xi=E(x,t+r), \tag{10}$$

$$\int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)E^{1+\alpha}(\xi,\tau+r)d\xi\leqslant C_1E(x,t+r), \tag{11}$$

$$\int_0^t d\tau\int_{R^n}D_{x_i}E(x-\xi,t-\tau)E^{1+\alpha}(\xi,\tau+r)d\xi\leqslant C_2E(x,t+r), \tag{12}$$

$i=1,2,\cdots,n$,其中C_1,C_2为正常数.

引理 3 设$n\alpha>2$,且初值$\varphi(x),\psi(x)$满足(H_3)

$$(H_3)\quad\begin{cases}|\varphi(x)|<\delta E(x,r),\ |\psi(x)|<\delta^{1+\alpha}E^{1+\alpha}(x,r), & (13)\\ |D_{x_i}\varphi(x)|<\delta E(x,r),\ |D_{x_i}\psi(x)|\leqslant(1+\alpha)\delta|\psi^{\alpha/(1+\alpha)}(x)|E(x,r), & \\ \qquad i=1,2,\cdots,n, & (14)\end{cases}$$

其中 δ 为正常数，则 $(u_0,v_0)\in B$，且

$$\|(u_0,v_0)\|_B\leqslant 2(n+1)\delta. \tag{15}$$

证明 由引理 1 中(10) 及条件(H_3)，得到

$$|u_0(x,t)|\leqslant\int_{R^n}E(x-\xi,t)|\varphi(\xi)|d\xi<\delta\int_{R^n}E(x-\xi,t)E(\xi,r)d\xi=\delta E(x,t+r), \tag{16}$$

$$|v_0(x,t)|\leqslant\int_{R^n}E(x-\xi,t)|\psi^{1/(1+\alpha)}(\xi)|d\xi<\delta\int_{R^n}E(x-\xi,t)E(\xi,r)d\xi=\delta E(x,t+r), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}|D_{x_i}u_0(x,t)|&\leqslant\int_{R^n}|D_{x_i}E(x-\xi,t)|\cdot|\varphi(\xi)|d\xi=\int_{R^n}|D_{\xi_i}E(x-\xi,t)|\cdot|\varphi(\xi)|d\xi\\&=\int_{R^n}E(x-\xi,t)|D_{\xi_i}\varphi(\xi)|d\xi<\delta E(x,t+r),\quad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}|D_{x_i}v_0(x,t)|&\leqslant\int_{R^n}|D_{x_i}E(x-\xi,t)|\cdot|\psi^{1/(1+\alpha)}(\xi)|d\xi\\&=\int_{R^n}E(x-\xi,t)|D_{\xi_i}(\psi^{1/(1+\alpha)}(\xi))|d\xi<\delta E(x,t+r),\quad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned} \tag{19}$$

由(16) — (19) 即得(15)，从而引理 2 得证.

令

$$S_1(u,v)=\int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)v^{1+\alpha}(\xi,\tau)d\xi, \tag{20}$$

$$S_2(u,v)=\int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)f(u,D_xu,v^{1+\alpha},D_xv)(\xi,\tau)d\xi. \tag{21}$$

引理 4 设 $n\alpha>2$，f 满足(H_1)，则当 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in B$，且 $\|(u_1,v_1)\|_B,\|(u_2,v_2)\|_B\leqslant N$，$N$ 为正常数，成立

$$\begin{aligned}&\|(S_1(u_1,v_1)-S_1(u_2,v_2),S_2(u_1,v_1)-S_2(u_2,v_2))\|_B\\&\qquad\leqslant C_3N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_B,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\|(S_1(u_1,v_1),S_2(u_1,v_1))\|_B\leqslant C_3N^{1+\alpha}, \tag{23}$$

其中 C_3 为与(u_1,v_1)，(u_2,v_2) 无关的正常数.

证明 由于 $D_\eta f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)=(1+\alpha)\eta^\alpha f'_{\eta^{1+\alpha}}(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)$，

在 $(\xi,\zeta,\eta,\varepsilon)=(0,0,0,0)$ 时，$D_\eta f(0,0,0,0)=0$，同时注意到条件(H_1) 中(4)，根据 $f\in C^{1+\alpha}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ 的 Hölder 连续性，得到

$$\begin{aligned}&|f'_\xi(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|,|f'_\zeta(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|,|D_\eta f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|,|D_\varepsilon f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|\\&\qquad\leqslant C_4(|\xi|+|\zeta|+|\eta|+|\varepsilon|)^\alpha,\end{aligned} \tag{24}$$

其中 C_4 为 Hölder 系数.

于是根据多元函数中值定理及空间 B 的定义得到

$$
\begin{aligned}
&|f(u_1,D_xu_1,v_1^{1+\alpha},D_xv_1)-f(u_2,D_xu_2,v_2^{1+\alpha},D_xv_2)|\\
&\leqslant |f'_\xi(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|\cdot|u_1-u_2|+|D_\zeta f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|\cdot|D_xu_1-D_xu_2|\\
&\quad+|D_\eta f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|\cdot|v_1-v_2|+|D_\varepsilon f(\xi,\zeta,\eta^{1+\alpha},\varepsilon)|\cdot|D_xv_1-D_xv_2|\\
&\leqslant C_4(|\xi|+|\zeta|+|\eta|+|\varepsilon|)^\alpha(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|+|D_xu_1-D_xu_2|+|D_xv_1-D_xv_2|)\\
&\leqslant C_4N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_BE^{1+\alpha}(x,t+r), \qquad (25)
\end{aligned}
$$

其中 $(\xi,\zeta,\eta,\varepsilon)$ 为 (u_1,D_xu_1,v_1,D_xv_1) 与 (u_2,D_xu_2,v_2,D_xv_2) 之间的中介值,且(25) 中最后一个不等式可由下式推得

$$
\begin{aligned}
(|\xi|+|\zeta|+|\eta|+|\varepsilon|)^\alpha &\leqslant \max\{(|u_1|+|D_xu_1|+|v_1|+|D_xv_1|)^\alpha\\
&\quad+(|u_2|+|D_xu_2|+|v_2|+|D_xv_2|)^\alpha\}\\
&\leqslant N^\alpha E^\alpha(x,t+r), \qquad (26)
\end{aligned}
$$

于是由(25) 及引理 1 得

$$
\begin{aligned}
&|S_2(u_1,v_1)-S_2(u_2,v_2)|\\
&\leqslant \int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)|f(u_1,D_xu_1,v_1^{1+\alpha},D_xv_1)-f(u_2,D_xu_2,v_2^{1+\alpha},D_xv_2)|d\xi\\
&\leqslant \int_0^t d\tau\int_{R^n}E(x-\xi,t-\tau)C_4N^\alpha E^{1+\alpha}(x,t+r)\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_Bd\xi\\
&\leqslant C_4N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_BE(x,t+r), \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|D_{x_i}S_2(u_1,v_1)-D_{x_i}S_2(u_2,v_2)|\\
&\leqslant \int_0^t d\tau\int_{R^n}|E_{x_i}(x-\xi,t-\tau)|\cdot|f(u_1,D_xu_1,v_1^{1+\alpha},D_xv_1)-f(u_2,D_xu_2,v_2^{1+\alpha},D_xv_2)|d\xi\\
&\leqslant C_4N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_B\int_0^t d\tau\int_{R^n}|E_{x_i}(x-\xi,t-\tau)|\cdot E^{1+\alpha}(\xi,\tau)d\xi\\
&\leqslant C_4N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_BE(x,t+r), \quad i=1,2,\cdots,n. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

根据 S_1 的定义及引理 1,易得

$$
|S_1(u_1,v_1)-S_1(u_2,v_2)|\leqslant C_5N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_BE(x,t+r), \qquad (29)
$$

$$
\begin{aligned}
&|D_{x_i}S_1(u_1,v_1)-D_{x_i}S_1(u_2,v_2)|\leqslant C_5N^\alpha\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_BE(x,t+r),\\
&\qquad i=1,2,\cdots,n. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

综合(27) — (30),得到(22) 式,其中 $C_3=\max\{C_4,C_5\}$. 在(22) 中令 $(u_2,v_2)=(0,0)$,即得(23) 式. 引理 4 证毕.

三、整体存在唯一性

本节将证明问题(1)、(2) 存在唯一的一个全局古典解,这是本文的中心定理.

定理 1 设 $n\alpha > 2$,f 满足(H_1),φ 与 ψ 满足(H_2) 及(H_3)(引理 3 中((13),(14)),则当 δ 充分小,积分方程组(7) 存在唯一整体古典解$(u,v) \in B$.

证明 定义积分算子 $T: B \to B$,

$$T(u,v) = (u_0,v_0) + (S_1(u,v), S_2(u,v)). \tag{31}$$

令
$$B_1 = \{(u,v) \in B \mid \|(u,v)\|_B \leqslant N\},$$

N 为可任意选择的正常数,显然 B_1 是 Banach 空间 B 中闭球(闭凸集).

我们将证明 T 是 B_1 中压缩算子(通过选取适当的 N).

Step1, $T: B_1 \to B_1$.

设$(u,v) \in B_1$,即 $\|(u,v)\|_B \leqslant N$,于是由引理 3、引理 4 得到

$$\begin{aligned}\|T(u,v)\|_B &\leqslant \|(u_0,v_0)\|_B + \|(s_1(u,v), S_2(u,v))\|_B \\ &< 2(n+1)\delta + C_3 N^{1+\alpha},\end{aligned} \tag{32}$$

选取 $N < (1/C_3)^{1/\alpha}$ 为 B_1 中的 N,则 $1 - C_3 N^\alpha > 0$. 又可选适当小的 δ,使得 $\delta < (1/2(n+1))(N - C_3 N^{1+\alpha})$,因而

$$\|T(u,v)\|_B \leqslant 2(n+1)\delta + C_3 N^{1+\alpha} \leqslant N, \tag{33}$$

即证明了 $T(u,v) \in B_1$,亦即 $T: B_1 \to B$.

Step2,证明 T 为 B_1 中压缩算子.

设(u_1,v_1),$(u_2,v_2) \in B_1$,由引理 4,并注意到 $C_3 N^\alpha < 1$,可得

$$\begin{aligned}&\|T(u_1,v_1) - T(u_2,v_2)\|_B \\ &= \|(S_1(u_1,v_1) - S_1(u_2,v_2), S_2(u_1,v_1) - S_2(u_2,v_2))\|_B \\ &\leqslant C_3 N^\alpha \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_B < \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|_B,\end{aligned} \tag{34}$$

即 T 为 B_1 中压缩算子.

根据 Banach 压缩不动点原理,即知 T 在 B_1 中存在唯一的不动点,从而知道积分方程组(7) 在 B 中存在唯一的全局古典解. 定理证毕.

由定理 1 的证明(B_1 的构造及 N 的选择),不难知道

推论 1 问题(7) 的古典解(u,v) 有界值性:

$$\|(u,v)\|_B \leqslant (1/C_3)^{1/\alpha}. \tag{35}$$

定理 2 在定理 1 的假设下,对任意$(u^{(0)},v^{(0)}) \in B_1$,则序列$\{(u^{(m)},v^{(m)})\} = \{T(u^{(m-1)}, v^{(m-1)})\}$ 逼近到问题(7) 的唯一古典解(u,v),且其误差估计为

$$\|(u^{(m)},v^{(m)})-(u,v)\|_B\leqslant\frac{(C_3N^{\alpha})^m}{1-C_3N^{\alpha}}\|(u^{(1)},v^{(1)})-(u^{(0)},v^{(0)})\|_B.$$

证明 由定理 1 中(34)式可知

$$\begin{aligned}\|(u^{(m)},v^{(m)})-(u,v)\|_B&=\|T(u^{(m-1)},v^{(m-1)})-T(u,v)\|_B\\&\leqslant\|T(u^{(m-1)},v^{(m-1)})-T(u^{(m)},v^{(m)})\|_B+\|T(u^{(m)},v^{(m)})-T(u,v)\|_B\\&\leqslant C_3N^{\alpha}\|(u^{(m)},v^{(m)})-(u^{(m-1)},v^{(m-1)})\|_B+C_3N^{\alpha}\|(u^{(m)},v^{(m)})-(u,v)\|_B,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\|(u^{(m)},v^{(m)})-(u,v)\|_B&\leqslant\frac{C_3N^{\alpha}}{1-C_3N^{\alpha}}\|(u^{(m)},v^{(m)})-(u^{(m-1)},v^{(m-1)})\|_B\\&\leqslant\frac{(C_3N^{\alpha})^m}{1-C_3N^{\alpha}}\|(u^{(1)},v^{(1)})-(u^{(0)},v^{(0)})\|_B.\end{aligned}$$

四、实例应用及几点说明

我们考虑如下的一个四阶抛物型方程 Cauchy 问题.

例

$$\begin{cases}\triangle_t^2u=(1+\alpha)(\triangle_tu)^{\frac{2\alpha+1}{1+\alpha}}-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\dfrac{(D_x\triangle_tu)^2}{\triangle_tu},\\ t=0,\ u=\varphi(x),\ \triangle_tu=\psi(x),\end{cases}\tag{P}$$

其中 $\varphi(x),\psi(x)$ 均为正的连续可微函数.

显然,Cauchy 问题(P)等价下述半线性耦合二阶抛物方程组的 Cauchy 问题(令 $w=\triangle_tu$)

$$\begin{cases}u_t-\triangle u=w,\\ w_t-\triangle w=(1+\alpha)w^{\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}}-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\dfrac{w_x^2}{w},\ (x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\\ t=0,\ u=\varphi(x),\ w=\psi(x),\ x\in\mathbf{R}^n.\end{cases}\tag{P$'$}$$

由引理 1 知,(P)中 $u,\triangle_tu>0$,即(P),(P$'$)中方程是合理的.

注 1 在(P)中非线性函数 F 相当于

$$F=(1+\alpha)\triangle_tu-\frac{\alpha}{1+\alpha}(D_x\triangle_tu)^2(\triangle_tu)^{-\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}},$$

且满足(H_1).从(P)或(P$'$)知道,问题(1),(2)有一定的实际背景,是一类半线性二阶抛物型方程组初值问题更为一般形式的描述.

令 $v=(\triangle_tu)^{1/(1+\alpha)}$,则(P)等价于(P$''$),

$$\begin{cases}u_t-\triangle u=v^{1+\alpha},\\ v_t-\triangle v=v^{1+\alpha},\qquad (x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\\ t=0,u=\varphi(x),v=(\psi(x))^{1/(1+\alpha)},\ x\in\mathbf{R}^n.\end{cases}\tag{P$''$}$$

注 2 当 $n\alpha > 2$,φ,ψ 满足(H_2)与(H_3),由定理 1 知(P'')存在唯一正的古典解,即(P)存在唯一正古典解.

注 3 当 $0 < n\alpha < 2$ 时,且 $\varphi,\psi \in B$,则(P'')的整体解(u,v)不存在而在有限时刻发生 blowing up.

事实上,由 Fujita H.[1] 的定理 1 知,问题(P'')的第二个方程 $\triangle_t v = v^{1+\alpha}, v|_{t=0} = (\psi(x))^{1/(1+\alpha)}$ 的解 v 一定在有限时刻发生 blowing up. 从而由(P'')的第一个方程 $u_t - \triangle u = v^{1+\alpha}, u|_{t=0} = \varphi(x)$ 知 u 也在该时刻发生 blowing up.

作者对审稿先生的建议和帮助表示衷心感谢.

(本文作者通讯地址:江西抚州市华东地质学院数学教研组　邮码　344000)

参 考 文 献

[1] Fujita, H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I*, **13** (1966), 109-124.

[2] Mei Ming(梅茗), On nonlinear coupled reaction-diffusion systems, *Acta Math. Sci.*, **9** (1989), 2.

[3] 梅茗,非线性四阶抛物型方程 Cauchy 问题整体光滑解,数学学报.(待发表)

[4] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hell, 1964.

[5] 文如庆,关于半线性四阶抛物型方程古典解,湖南数学年刊,**4** (1984).

GLOBAL SOLUTIONS OF CAUCHY PROBLEMS FOR NONLINEAR FOURTH ORDER PARABOLIC EQUATIONS WITH HIGH DIMENSION

Huang Fuyin　Mei Ming

(East China Geological Institute)

Abstract

In this paper the global existence and uniqueness of the classical solutions for the Cauchy problems of a class of nonlinear fouth order parabolic equations with high dimension are proved, as the initial values are suitably small and the nonlinear terms are sufficently smooth.

Key Words Nonlinear Fouth Order Parabolic Equations, Global Solution, Cauchy Problem, Existence and Unqueness.