12(1992),(增刊),119—121.

数学物理学报
Acta Mathematica Scientia

一类反应扩散系统解的全局稳定性和渐近性*

梅　茗**
(华东地质学院数学教研室,344000)

曹德芬　肖应昆
(江西师范大学数学系,330027)

本文讨论生物学中描述互助竞争的两种群密度分布的一类耦合反应扩散方程组初边值问题

$$u_t - a\Delta u = -u\psi(u, v) \tag{1}$$

$$(t, x \in R_+ \times \Omega$$

$$v_t - c\Delta u - d\Delta v = u\psi(u, v) \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

$$u(0, x) = u_0(x),\ v(0, x) = v_0(x),\ x \in \Omega \tag{4}$$

其中扩散系数 a、d 及渗透系数 c 均为正常数,η 表示边界 $\partial\Omega$ 的单位法向量,$\Omega \subset R^n$ 为有界开集,且边界 $\partial\Omega$ 光滑. 本文的基本假设条件为

(H_1)　$\psi(u, v) \in C^1(R \times R)$,且非负有界,即 $\exists M > 0$,有$0 \leqslant \psi \leqslant M$

(H_2)　$u_0(x) \geqslant 0$,$v_0(x) \geqslant cu_0(x)/(a-d)$均为连续可微的,

(H_3)　$d > M/4 + c^2/(4a)$,$a > d$.

本文主要结论为

定理 1　设 (u, v) 为问题(1)—(4)的整体经典解,则存在常数向量(K_1, K_2),且满足

$$K_1 \geqslant 0,\ K_2 \geqslant 0,\ K_1\psi(K_1, K_2) = 0 \tag{5}$$

$$K_1 + K_2 = (\text{meas}\ \Omega)^{-1}\int_\Omega [u_0(x) + v_0(x)]\,dx \tag{6}$$

当 $t \to \infty$ 时,对于满足(5)、(6)的任意一组常数 (K_1, K_2),总存在 (u, v) 的一个收敛子列 $\{(u(t_n, x), v(t_n, x))\}$,使得$(u(t_n, x), v(t_n, x))$一致收敛于 (K_1, K_2)。

定理 2　问题(1)—(4)的常数平衡解是全局稳定的。

引理 1　设(u, v)为(1)—(4)之整体经典解,且(H_1)—(H_3)成立,则

$$u(x, t) \geqslant 0,\ v(x, t) \geqslant cu(x, t)/(a-d),\ (x, t) \in \Omega \times R_+$$

引理 2　在(H_1) - (H_4) 下,(1)—(4)之解 (u, v) 成立

---

* 国家、江西省自然科学基金资助课题。

1990年11月27日收到。

$$\|u(t)\|_{L^2}^2<+\infty,\ \|v(t)\|_{L^2}^2<+\infty,\ \forall t\geqslant 0$$

$$\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2d\tau<+\infty,\ \int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2d\tau<+\infty,\ \forall t\geqslant 0$$

引理 3 设 (u, v) 为(1)—(4)之解，则 $\|u\|_{C(0,+\infty;C(\bar{\Omega}))}<C_1$，$\|v\|_{C(0,+\infty;C(\bar{\Omega}))}<C_2$

引理 4 $U_{t\geqslant 0}\{u(t)\}$、$U_{t\geqslant 0}\{v(t)\}$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中存在着收敛子列 $\{u(t_m)\}$，$\{v(t_m)\}$，$(t_m\to+\infty,\ m\to+\infty)$

引理 5 [6]如果对方程（组）

$$u_t-A\Delta u=F(u) \tag{7}$$

存在正定的具有无穷大性质的函数 $V(u)$，令 $E(u)(t)=\int_\Omega V(u)(x,t)dx$

若成立 $$dE/dt=\int_\Omega\nabla V(u)\cdot{}^T(\partial u/\partial t)dx<0$$

则方程(组)(7)的零解是全局稳的，${}^T(\partial u/\partial t)$ 表示向量$(\partial u/\partial t)$ 的转置。

定理 1 的证明框架 用 $W(u_0, v_0)$ 表示(u_0, v_0) 的弱极限集[4]，$\mathscr{F}$ 表示相应椭圆方程组的解集 $\mathscr{F}=\{u_s, v_s)\}$

$$-a\Delta u_s=-u_s\psi(u_s, v_s)\ \text{in}\ \Omega \tag{8}$$

$$-c\Delta u_s-d\Delta v_s=u_s\psi(u_s, v_s) \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u_s}{\partial\eta}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial v_s}{\partial\eta}\right|_{\partial\Omega}=0 \tag{10}$$

第一步，证明 $W(u_0, v_0)\neq\phi$。

由方程(1)+(2)，再关于 x, t 积分，并运用分部积分及边界条件(3)，得

$$\int_\Omega[u(x,t)+v(x,t)]dx=\int_\Omega[u_0(x)+v_0(x)]\,dx \tag{11}$$

另外，对 $ut-a\Delta u=-u\psi(u, v)$ 积分可得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx<0 \tag{12}$$

即$\int_\Omega u(x,t)dx$ 关于 t 是单调减函数，再由(12)得知$\int_\Omega v(x,t)dx$ 关于 t 是单调的，从而

$$\lim_{t\uparrow\infty}(\text{meas }\Omega)^{-1}\int_\Omega u(x,t)dx=l_1,\ \lim_{t\uparrow\infty}(\text{meas }\Omega)^{-1}\int_\Omega v(x,t)dx=l_2$$

再由引理 4 知，存在序列 $\{t_n\}_{n>0}$，$t_n\uparrow\infty$，使得

$$\lim_{n\uparrow\infty}u(t_n)=\bar{u}_s,\ \lim_{n\uparrow\infty}v(t_n)=\bar{v}_s\quad\text{in }C(\bar{\Omega})$$

即$(\bar{u}_s, \bar{v}_s)\in W(u_0, v_s)$，i. e. $W(u_0, v_0)\neq\phi$

第二步，证 $\mathscr{F}=\{(K_1, K_2)\}$，其中 K_1, K_2 为常数。

事实上，对(8)进行能量积分得 $\nabla u_s\equiv 0$，即 $u_s=K_1$，又由(8)+(9)进行能量积分得 $\Delta v_s\equiv 0$，即 $v_s=K_2$，且由(8)、(9)得 $K_1\psi(K_1, K_2)=0$

第三步，证 $W(u_0, v_0)=\mathscr{F}$

$\forall x\in\Omega, \sigma\in(-1, 1)$，令 $p_n(x,\sigma)=u(x, t_n+\sigma)$，$q_n(x,\sigma)=v(x, t_n+\sigma)$

由方程组(1)、(2)及引理 2 可得

$$p_n \to \overline{u_s},\ \overline{b_n} \to \overline{v_s}, \nabla p_n \to \nabla \overline{u_s},\ \Delta q_n \to \nabla \overline{v_s},\ n \to \infty, \text{ in } L^2(\Omega \times (-1, 1))$$

$$p_n \psi(p_n, q_n) \to u_s \psi(u_s, v_s),\ n \to \infty, \text{ in } L^2(\Omega \times (-1, 1))$$

令 $\xi_i \in C^1(\overline{\Omega})$，且 $\xi_i|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 1, 2$, $\rho \in C^1[-1, 1]$，且 $\int_{-1}^{1} \rho(s) ds = 1$, $\rho(-1) = \rho(1) = 0$ 再由方程组(1)、(2)、引理 3 及 Lebesque 控制收敛定理，取极限可证明

$$\int_\Omega [a \nabla \overline{u_s} \cdot \nabla \xi_1 + \overline{u_s} \psi(\overline{u_s}, \overline{v_s}) \xi_1] dx = 0 \tag{13}$$

$$\int_\Omega [C \nabla \overline{u_s} \cdot \nabla \xi_2 + d \nabla \overline{v_s} \cdot \nabla \xi_2 + \overline{u_s} \psi(\overline{u_s}, \overline{v_s}) \xi_2] dx = 0 \tag{14}$$

(13)、(14)恰好是方程组(8)—(10)弱解所满足的积分方程，因而 $W = \mathscr{F}$，即

$$\lim_{n \uparrow \infty} u(x, t_n) = K_1,\ \lim_{n \uparrow \infty} v(x, t_n) = K_2,\ K_1 + K_2 = (\text{meas } \Omega)^{-1} \int_\Omega (u_0 + v_0) dx$$

定理 2 的证明框架　首先对 u、v 从 Ω 上零延拓至 R^n 中，再作用软化算子 J_ε，并记 $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u$, $v_\varepsilon = J_\varepsilon * v$，构造

$$V(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \frac{1}{2}(u_\varepsilon^2 + v_\varepsilon^2),\quad E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_\varepsilon^2 + v_\varepsilon^2) dx$$

由引理 5 及软化算子 J_ε 的性质可证定理 2 的结论。

参 考 文 献

[1] Smoller, J., Shock waves and reaction—diffusion eqnations, Sprinqer—Verlag, 1983.

[2] Kirane, M., Global bounds aud asymptotics for a class of reaction—diffusion equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 138(1989), 328—342.

[3] Mei Ming(梅茗), On nonlinear coupled reaction—diffusion systems, *Acta Math. Sceintica*, 9, (1989), 2, 163—174.

[4] 叶其孝，李正元，反应扩散方程引论，科学出版社，北京，1990.

[5] 曹德芬，现代数学与力学(MMM—IV)，主编，程昌钧，兰州大学出版社，兰州，132—136.

[6] Stampaechia, G., Equations elliptiques de second order a cofficients discontinus, Press de I'Univ. de Montreal, 1965.

[7] Stewart, M.B., Generation of analytic Semi—group by strong ellipti coperation, *Trans. Amer. Math*, Soc., 199(1974), 141—162.