Vol. 10(1990)
No. 3

数学杂志
J. of Math.(PRC)

Maxwell-Boltzmann方程非负解的极值原理和渐近性质*

梅 茗

(华东地质学院)

摘要 本文研究了 Maxwell-Boltzmann 方程非负解的极值原理以及随时间延伸而逐渐衰减的解的时间渐近行为。

一、引言

在核物理学中，描述两类不同基本粒子M和N具有互相碰接作用的迁移过程中粒子N分布密度情形，可表述为一个线性迁移方程形式。其中，M类粒子不受外力F的影响而处于平衡状态，但是以另一类粒子N的物理性质为其先决条件的。外力F只表示处于位置x处，具有速度v的，对具有质量m的每一个N类粒子的外力作用，N类粒子本身的碰撞较之于与M类粒子的碰撞通常可忽略不计。这类迁移方程即为 Maxwall-Boltzmann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\cdot grad_x u+\frac{F(x,v)}{m}grad_v u+\frac{1}{m}(div_v F)u$$

$$+\sigma(x,v)u=\int_V k(x,v,v')u(t,x,v')dv',\ (t,x,v)\in E \tag{1}$$

$$u(t,x,v)=0,\ (t,x,v)\in\Gamma \tag{2}$$

$$u(o,x,v)=u_0(x,v),\ (t,x,v)\in\Gamma_0 \tag{3}$$

其中u表示在时刻t位于$x=(x_1,x_2,x_3)$处，具有速度$v=(v_1,v_2,v_3)$的粒子N分布密度。$\sigma(x,v)$、$k(x,v,v')>0$分别表示碰撞频率和能量迁移核。F是外力，$m>0$是N的质量，$v\cdot grad_x u=\sum_{i=1}^{3}v_i\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}$，$F\cdot grad_v u=\sum_{i=1}^{3}F_i\frac{\partial u}{\partial v_i}$，$div_v F=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F_i}{\partial v_i}$ D是R^3中有界闭区域，且边界∂D为分片光滑，V是R^3中闭的有界可测集，$\sigma(x,v)$、$k(x,v,v')$、$F(x,v)$，$u_0(x,v)$均为连续函数，且$u_0\geqslant 0$。记

* 1988年6月7日收到，1989年5月29日收到修改稿。

$$E=\{(t,x,v)\mid 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in D,\ v\in V,\ \forall T>0\}$$

$$\Gamma_0=\{(t,x,v)\mid t=0,\ x\in D,\ v\in V\}$$

$$\Gamma=\{(t,x,v)\mid 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\partial D,\ n\cdot v<0,\ v\in V,\ \forall T>0\}$$

n是边界面∂D的单位外法向量。

在迁移理论中，研究该动态系统的目的在于获得分布密度u随时间变化的衰减或增长的时间逐近行为，以期能预言整个系统的发展和终结。在数学上，归结为两点，第一，要研究系统解的存在性，第二，要研究其渐近性。另外，系统（1）—（3）作为积分——微分方程同时是一类很重要的发展方程，因而对该类问题的研究有着不少实际意义和理论价值，从而为数学界、原子能物理学界众多学者所关注[1-5]。最近，L. Arlotti[5] 利用线性算子半群理论研究了系统（1）—（3）解的整体存在唯一性。另外，作为特例，当 $F\equiv 0$ 时系统（1）—（3）即为中子迁移理论中的 Boltzmann 方程而被众多学者作了较系统和深入的研究[6-10]。

本文的目的在于研究系统（1）—（3）非负解（其存在唯一性为L. Arlotti[5]所解决）的极值原理以及解的时间渐近行为，得到了解随时间的延伸而以指数速度衰减的渐近性质。

二、极值原理及渐近性质

我们给出系统（1）—（3）的一个比较原理，它在利用上、下解方法证明系统（1）—（3）解的存在唯一性，对解作先验估计以及讨论解的渐近性态过程中通常起着特重要的作用。

定理1（比较原理） 设

$$\sigma(x,v)+\frac{1}{m}(div_vF)>\int_V k(x,v,v')dv',\quad (x,v)\in\overline{D}\times\overline{V}, \tag{4}$$

假设 $u(t,x,v)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\cdot grad_x u+\frac{F(x,v)}{m}\cdot grad_v u+\frac{1}{m}(div_vF)\cdot u$$

$$+\sigma(x,v)u-\int_V k(x,v,v')u(t,x,v')dv'\geqslant 0,\quad (t,x,v)\in E, \tag{5}$$

$$u(t,x,v)\geqslant 0,\quad (t,x,v)\in\Gamma, \tag{6}$$

$$u(0,x,v)\geqslant 0,\quad (t,x,v)\in\Gamma_0, \tag{7}$$

则 $u(t,x,v)\geqslant 0,\ (t,x,v)\in E$.

证 若不然，则至少存在一点 $(t_0,x_0,v_0)\in E$，使得 $u(t_0,x_0,v_0)<0$，因而 $\min\limits_E u(t,x,v)<0$. 设 u 在 $(\overline{t},\overline{x},\overline{v})\in E$ 达到最小值 $u(\overline{t},\overline{x},\overline{v})=\mathrm{Min}_E\, u(t,x,u)$，同

时由(6)(7)知$(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) \overline{\in} \Gamma+\Gamma_0$。由$u$在$(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})$的负极小值性质得到

$$\frac{\partial u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})}{\partial t} \leqslant 0, \quad grad_x u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})=0, \quad grad_v u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})=0$$ 另外，

$u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})$又满足(5)式，从而得到

$$\sigma(\bar{x}, \bar{v}) u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})+\frac{1}{m}(\operatorname{div}_v F) u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v})$$

$$\geqslant \int_V k(\bar{x}, \bar{v}, v') u(\bar{t}, \bar{x}, v') d v'$$

$$\geqslant u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{v}) \int_V k(\bar{x}, \bar{v}, v') d v'$$

即得

$$\sigma(\bar{x}, \bar{v})+\frac{1}{m}(div_v F(\bar{x}, \bar{v})) \leqslant \int_V k(\bar{x}, \bar{v}, v') d v'$$

这与(4)矛盾！因而$u(t,x,v) \geqslant 0$，$(t,x,v) \in E$。

注 1　假设条件(4)其物理意义表明粒子N吸收大于破裂，这将在本文定理5中得到表述。

推论 1　在假设条件(4)下，设$u(t,x,v)$为系统(1)—(3)的一个古典解，则此解必为非负解。

证　注意到初始分布密度$u_0(x,v) \geqslant 0$，因而系统(1)—(3)的一个经典解满足(5)—(7)，故由定理1即得$u(t,x,v) \geqslant 0$，$(t,x,v) \in E$。

定理 2（最大值原理）　在条件(4)下，设$u(t,x,v)$是系统(1)—(3)的经典解，则

$$O \leqslant u(t, x, v) \leqslant \operatorname*{Max}_{\Gamma_0} u, \quad (t, x, v) \in E \tag{8}$$

证　由推论1可知系统(1)—(3)的解$u(t, x, v) \geqslant 0$，现令

$$\operatorname*{Max}_{E} u(t, x, v)=M \geqslant 0, \quad \operatorname*{Max}_{\Gamma_0} u(t, x, v)=m \geqslant 0$$

由于$u|_{\Gamma}=0$，所以$\operatorname*{Max}_{\Gamma_0+\Gamma} u(t, x, v)=\operatorname*{Max}_{\Gamma_0} u(t, x, v)=m \geqslant 0$

若$M \leqslant m$，自然地，定理成立。

若$M>m$，则存在$(t_0, x_0, v_0) \in E$，使得$u(t_0, x_0, v_0)=M$。构造非负函数

$$W(t, x, v)=e^{-\frac{t-t_0}{2t_0} l_n \frac{M}{\lambda}} u(t, x, v), \quad (t, x, v) \in \bar{E}, \quad m<\lambda<M \tag{9}$$

在边界$\Gamma+\Gamma_0$上有

$$W(t,x,v)<e^{\frac{1}{2}l_n\frac{M}{\lambda}}\cdot\lambda<M$$

而 $W(t_0,x_0,v_0)=M$，这就说明 w 和 u 一样，不可能在 $\Gamma_0+\Gamma$ 上达到最大值而只能在 E 内某点上达到。不仿设 $w(t,x,v)$ 在 E 内点 $(\bar{t},\bar{x},\bar{v})$ 上达到最大值，于是

$$\frac{\partial w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})}{\partial t}\geqslant0,\ \mathrm{grad}_x w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})=\mathrm{grad}_v w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})=0$$

所以

$$\frac{\partial w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})}{\partial t}+\bar{v}\cdot\mathrm{grad}_x w(\bar{t},x,\bar{v})+\frac{F(\bar{x},\bar{v})}{m}\cdot\mathrm{grad}_v w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})\geqslant0 \tag{10}$$

另一向面，从方程(1)中得到

$$\frac{\partial w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})}{\partial t}+\bar{v}\cdot\mathrm{grad}_x w(\bar{t},\bar{x},\bar{v})+\frac{F(\bar{x},\bar{v})}{m}\cdot\mathrm{grad}_v w(\bar{t}\ \bar{x},\bar{v})$$

$$=e^{-\frac{\bar{t}-t_0}{2t_0}l_n\frac{M}{\lambda}}\Big[\frac{\partial u(\bar{t},\bar{x},\bar{v})}{\partial t}+\bar{v}\cdot\mathrm{grad}_x u(\bar{t},\bar{x},\bar{v})$$

$$+\frac{F(\bar{x},\bar{v})}{m}\cdot\mathrm{grad}_v u(\bar{t},\bar{x},\bar{v})-\frac{1}{2t_0}l_n\frac{M}{\lambda}\cdot u(\bar{t},\bar{x},\bar{v})\Big]$$

$$=\exp\Big(-\frac{\bar{t}-t_0}{2t_0}l_n\frac{M}{\lambda}\Big)\Big[\int_V k(\bar{x},\bar{v},v')u(\bar{t},\bar{x},\bar{v}')dv,$$

$$-\Big(\sigma(\bar{x},\bar{v})+\frac{1}{m}div_vF(\bar{x},\bar{v})+\frac{1}{2t_0}l_n\frac{M}{\lambda}u(\bar{t},\bar{x},\bar{v})\Big)\Big]$$

$$\leqslant\exp\Big(-\frac{\bar{t}-t_0}{2t_0}l_n\frac{M}{\lambda}\Big)u(\bar{t},\bar{x},\bar{v})\Big[\int_V(\bar{x},\bar{v},v')dv'$$

$$-\sigma(\bar{x},\bar{v})-\frac{1}{m}\mathrm{div}_vF(\bar{x},\bar{v})-\frac{1}{2t_0}l_n\frac{M}{\lambda}\Big]<0 \tag{11}$$

这与(9)矛盾！故此 $M\leqslant m$。定理证毕。

类似于定理1的证明，在与条件(4)相反的假设下，我们得到了系统(1)—(3)非负解最小值原理。

定理3（最小值原理） 设 u 是系统(1)—(3)的非负解，假若

$$\sigma(x,v)+\frac{1}{m}\mathrm{div}_vF(x,v\leqslant\int_V k(x,v,v')dv',\ (x,v)\in\bar{D}\times\bar{V} \tag{12}$$

则

$$\underset{\Gamma_0}{\mathrm{Min}}\ u \leqslant u(t, x, v),\quad (t, x, v) \in E \tag{13}$$

注 2　条件(4)只是系统(1)—(3)解为非负解的充分条件而非必要条件。因而我们在定理 3 中给出系统(1)—(3)非负解存在的假设与条件(12)并不矛盾。

作为定理 2 的一个直接推论，我们得到了系统(1)—(3)解的唯一性定理

推论 2　在条件(4)下，若系统(1)—(3)的解存在，则解必唯一。

证　假设系统(1)—(3)存在着两个解 u_1 和 u_2，令 $u=u_1-u_2$，则 u 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+v\cdot\mathrm{grad}_x u+\dfrac{F(x,v)}{m}\cdot\mathrm{grad}_v u+\dfrac{1}{m}(\mathrm{div}_v F)u \\ \qquad +\sigma(x, v)u=\displaystyle\int_V k(x, v, v')u(t, x, v')dv',\ (t, x, v)\in E \\ u(t, x, v)=0,\ (t, x, v)\in\Gamma \\ u(o, x, v)=o,\ (t, x, v)\in\Gamma_0 \end{cases}$$

由极大值原理定理 2 可得

$$u(t, x, v)\equiv 0,\quad (t, x, v)\in E$$

即系统(1)—(3)解唯一。

下面我们给出系统(1)—(3)的上、下解定义。

定义 1　若 $\bar{u}(t, x, v)\in C^1(R_+\times D\times V)$，满足

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+v\cdot\mathrm{grad}_x\bar{u}+\frac{F(x,v)}{m}\cdot\mathrm{grad}_v\bar{u}+\frac{1}{m}(\mathrm{div}_v F)\bar{u}+\sigma(x, v)\bar{u}$$

$$\geqslant\int_V k(x, v, v')\bar{u}(t, x, v')dv',\quad (t, x, v)\in E \tag{14}$$

$$\bar{u}(t, x, v)\geqslant 0,\quad (t, x, v)\in\Gamma \tag{15}$$

$$\bar{u}(t, x, v)\geqslant u_0(x, v),\quad (t, x, v)\in\Gamma_0 \tag{16}$$

则称 $\bar{u}(t, x, v)$ 为系统(1)—(3)的一个上解。

若 $\underline{u}(t, x, v)\in C^1(R_+\times D\times V)$，且满足(14)—(16)的相反不等式，则称之为系统(1)—(3)的一个下解。

利用比较原理可得系统(1)—(3)的解的一个界值性定理

定理4(界值性)　在条件(4)下，设 u 为系统(1)—(3)的经典解，$\bar{u}$、$\underline{u}$ 分别为其上、下解，且 $\underline{u}\leqslant\bar{u}$，则

$$\underline{u}(t, x, v)\leqslant u(t, xv)\leqslant\bar{u}(t, x, v),\quad (t, x, v)\in E \tag{17}$$

证 令 $w=\bar{u}-u$，由上解的定义可得

$$\frac{\partial w}{\partial t}+v\cdot \mathrm{grad}_x w+\frac{F(x,v)}{m}\cdot \mathrm{grad}_v w+\frac{1}{m}(\mathrm{div}_v F)w$$

$$+\sigma(x,v)w-\int_V k(x,v,v')w(t,x,v')dv'\geqslant 0, \tag{18}$$

$$w(t,x,v)\geqslant 0,\ (t,x,v)\in\Gamma \tag{19}$$

$$w(o,x,v)\geqslant 0,\ (t,x,v)\in\Gamma_0 \tag{20}$$

于是由比较原理（定理1）立即得到 $w(t,x,v)\geqslant 0$，即

$$u(t,x,v)\leqslant\bar{u}(t,x,v),\ (t,x,v)\in\bar{E}$$

同理可证 $\underline{u}(t,x,v)\leqslant u(t,x,v)$，$(t,x,v)\in\bar{E}$ 证毕。

作为定理4的特例，我们给出系统（1）—（3）的解随时间的延伸而衰减的渐近性态。

定理5（渐近性） 设 $u(t,x,v)$为系统（1）—（3）的经典解，在条件（4）下，则

$$o\leqslant u(t,x,v)=O(e^{-Lt}) \tag{21}$$

其中 L 为常数，$o<L\leqslant s$。

$$S\equiv\operatorname*{Min}_{D\times V}\left\{\sigma(x,v)+\frac{1}{m}\mathrm{div}F(x,v)-\int_V k(x,v,v')dv'\right\}>0 \tag{22}$$

证 令$\bar{u}=c\cdot e^{-Lt}$，其中 $c>u_0(x,v)$，$\forall(x,v)\in\bar{D}\times\bar{V}$易验证

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+v\cdot \mathrm{grad}_x\bar{u}+\frac{F(x,v)}{m}\cdot \mathrm{grad}_v\bar{u}+\frac{1}{m}(\mathrm{div}_v F)\bar{u}$$

$$+\sigma(x,v)\bar{u}(t,x,v)$$

$$=-L\bar{u}+\frac{1}{m}(\mathrm{div}_v F)\bar{u}+\sigma(x,v)\bar{u}$$

$$=\bar{u}\left(\frac{1}{m}\mathrm{div}_v F+\sigma(x,v)-L\right)$$

$$\geqslant\bar{u}\int_V k(x,v,v')dv'=\int_V k(x,v,v')\bar{u}dv'$$

即$\bar{u}=c\cdot e^{-Lt}$为(1)—(3)的一个上解，同理可证$\underline{u}=0$为(1)—(3)的一个下解，或者直接从推论1中得到$u\geqslant 0$，从而根据界值性定理4立即得到

$$0\leqslant u(t,x,v)\leqslant c\cdot e^{-Lt},\quad (t,xv)\in \bar{E} \tag{23}$$

即$u(t,x,v)=0(e^{-Lt})$，定理证毕。

注3　综上所述，不难找到(1)—(3)的一对上、下解，因而我们也可用上、下解方法来寻求(1)—(3)解的存在性与唯一性结论。关于这个，作者将另文发表。

作者感谢肖应昆教授的热情指导和帮助。

参考文献

[1] H. B. DRANGE, On the Boltzmann Equation with External Forces, SIAM J. Appl. Math. 34(1978), 577—592.

[2] J. LEHNHR AND G. M. WING, On the Spectrum of an Unsymmetric Operator Arising in the Transport Theory of Neutrons, Comm. Pure Appl. Meth. 8(1955), 217—234.

[3] F. A. MOLINET, Existeoe, Uniquness and Properties of the Solutionns of the Boltzmann Equation for a Weakay Ionized gas 1, L J. MATH. PHYS. 18(1977), 984 996.

[4] Y. SHIZUTA, On The Classical Solutions of the Boltzmann Equation, Comm. Pure Appl. Math. 6(1983). 705—754.

[5] L. ARLOTTI, The Cauchy Problem For the Linear Maxwell—Boltzmann Equation, J. Diff. Equa. 69(1987), 166—184.

[6] E. W. LARSEN, Bounds and Maximum Principles for the Solution of the Linear Transport Equation, STAM J. Math. Anal. 12(1981), 282—292

[7] C. V. PAO, Positive Solution of a Time and Energy Dependent on Neutron Transport Problem, J. Math. Phys. 16(1975), 2166—2177.

[8] C. V. PAO, Asymptotic Behavior of the Solution for the Time Dependent on Neutron Transport Problem, J. Inte. Equa. 1(1979), 131—152.

[9] 肖应昆，中子迁移方程解的极值原理，江西师大学报，2(1985)，4—6.

[10] 阳名珠、朱广田，中国科学，1(1981)，25—30.

MAXIMUM PRINCIPLES AND ASYMPTOTIC BEHAVIORS OF THE NON-NEGATIVE SOLUTION FOR MAXWELL-BOLTZMANN EQUATION

Mei Ming (梅茗)

(*East China Geological Institute*)

Abstract

In this paper, we study the maximum principles of the non-negative solution for Maxwell-Boltzmann epuation, obtain the asymptotic behaviors of this solution which decays as the time increases.