Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT
Tarea 9
Fecha de entrega: martes 28 de noviembre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión
Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez
José Ángel Sánchez Gómez

0. **(a)** Explicar por qué se cree que se dejó cada ejercicio.

(b) Proponer posibles extensiones y generalizaciones de cada ejercicio.

1. Formular y demostrar el siguiente teorema (Teorema 2.5.10, Athreya y Lahiri) para convergencia en L_p en lugar de convergencia en L_1: Sea $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ un espacio de medida con $\mu(\Omega)<\infty$, y sea $\{f_n : n\geq 1\}\subset L_1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ tal que $f_n\to f$ c.t.p.$[\mu]$ y con f $(\mathscr{F}\setminus\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-medible. Si $\{f_n : n\geq 1\}$ es uniformemente integrable (u.i)., entonces f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|d\mu = 0.$$

2. (Problema 2.28, Athreya y Lahiri) Sea μ la medida de Lebesgue en $([-1,1],\mathscr{B}([-1,1]))$. Para $n\geq 1$, defínase $f_n(x)=nI_{(0,n^{-1})}(x)-nI_{(-n^{-1},0)}(x)$ y $f(x)\equiv 0$ para $x\in[-1,1]$. Demostrar que $f_n\to f$ c.t.p.$[\mu]$ y $\int f_n d\mu\to\int f d\mu$ pero $\{f_n\}_{n\geq 1}$ no es u.i.

3. (Problema 2.29, Athreya y Lahiri) Sea $\{f_n : n\geq 1\}\cup\{f\}\subset L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$.

(a) Demostrar que $\int|f_n-f|(d\mu)\to 0$ si y sólo si $f_n\xrightarrow{\mu} f$ (convergencia en medida) y $\int|f_n|d\mu\to\int|f|d\mu$.

(b) Demostrar además que si $\mu(\Omega)<\infty$ entonces las dos anteriores son equivalentes a $f_n\xrightarrow{\mu} f$ y $\{f_n\}$ u.i.

4. (Problema 2.30, Athreya y Lahiri) Para $n\geq 1$, sea $f_n(x)=n^{-1/2}I_{(0,n)}(x)$, $x\in\mathbb{R}$, y sea $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$. Sea λ la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Demostrar que $f_n\to f$ c.t.p.$[\lambda]$ y que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es u.i., pero $\int f_n d\lambda\nrightarrow\int f d\lambda$.

5. (Problema 3.2, Athreya y Lahiri) Sea $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ un espacio de medida con $\mu(\Omega)\leq 1$, y $f:\Omega\to(a,b)\subset\mathbb{R}$, $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$. Sea $\phi:(a,b)\to\mathbb{R}$ convexa. Demostrar que si $c\equiv\int f d\mu\in(a,b)$ y $\phi(f)\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ y $c\phi'_+(c)\geq 0$, entonces

$$\mu(\Omega)\phi\left(\int f d\mu\right)\leq\int\phi(f)d\mu.$$

6. (Caracterización de funciones convexas y Problema 3.6, Athreya y Lahiri) Demostrar que una función $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es convexa si y sólo si

$$\phi\left(\int_{[0,1]} f d\lambda\right)\leq\int_{[0,1]}\phi(f)d\lambda$$

para toda función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ acotada y Borel-medible, con λ la medida de Lebesgue.

7. (Problema 3.8, Athreya y Lahiri) Sea X una variable aleatoria no-negativa en un espacio de probabilidad.

(a) Demostrar que $(EX)(E\frac{1}{X}) \geq 1$. ¿Qué dice esto sobre la correlación entre X y $\frac{1}{X}$?

(b) Sean $f,g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Borel-medibles y tales que $f(x)g(x) \geq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}_+$. Demostrar que $Ef(X)Eg(X) \geq 1$.

8. (Problema 3.18, Athreya y Lahiri) Sea X una variable aleatoria no-negativa.

(a) Demostrar que $EX \log X \geq (EX)(E \log X)$.

(b) Demostrar que $\sqrt{1+(EX)^2} \leq E(\sqrt{1+X^2}) \leq 1+EX$.

9. (Problema 3.19, Athreya y Lahiri) Sea $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, y μ la medida de conteo. Denótese $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ por $\mathscr{L}^p$.

(a) Demostrar que $\mathscr{L}^p$ es el conjunto de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

(b) Para cada sucesión siguiente, encontrar todos los $p > 0$ tales que dicha sucesión pertenece a $\mathscr{L}^p$:

(i) $x_n \equiv \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

(ii) $x_n = \frac{1}{n(\log(n+1))^2}$, $n \geq 1$.

10. (Problema 3.21, Athreya y Lahiri) Sea $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, y $\mu = \mu_F$ con F una función de distribución en $\mathbb{R}$. Si $f(x) \equiv x^2$, encontrar $A_f = \{p : 0 < p < \infty,\ f \in L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu_F)\}$ para los siguientes casos:

(a) $F(x) = \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)du$, $x \in \mathbb{R}$, la función de distribución normal estándar.

(b) $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+u^2} du$, $x \in \mathbb{R}$.

11. (Ejercicio 6.7.1 (a), Resnick) Sea X_n una sucesión monótona de variables aleatorias. Demostrar que si $X_n \xrightarrow{P} X$, entonces $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$.

(Sugerencia: Considerar subsucesiones.)

12. (Ejercicio 6.7.4, Resnick) Sea $\{X_n,\ n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d., $EX_n = 0$, $EX_n^2 = \sigma^2$. Sea $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, y $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Demostrar que $\{S_n\}$ converge en L_2 si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

13. (Ejercicio 6.7.5, Resnick) Sea $\{X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d. Demostrar que si $X_i \in L_1$ entonces $\{n^{-1}S_n,\ n \geq 1\}$ es u.i.

14. (Ejercicio 6.7.7, Resnick) Sea $X_n \sim \mathscr{N}(0, \sigma_n^2)$. ¿Cuándo es $\{X_n\}$ u.i.?

15. (Ejercicio 6.7.12, Resnick) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias. Demostrar lo siguiente:

(a) Si $X_n \xrightarrow{P} 0$, entonces, para todo $p > 0$,

$$\frac{|X_n|^p}{1+|X_n|^p} \xrightarrow{P} 0 \tag{1}$$

y

$$E\left(\frac{|X_n|^p}{1+|X_n|^p}\right) \to 0. \tag{2}$$

(b) Si para $p > 0$ se cumple (1), entonces $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(c) Si $p > 0$, entonces $X_n \xrightarrow{P} 0$ si y sólo si (2).

16. (Igualdad en el Teorema 6.2 (desigualdad de Jensen)) Sea f una función medible en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con $\mathbb{P}(f \in (a,b)) = 1$ para $-\infty \leq a < b \leq \infty$, y sea $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces

$$\phi\left(\int f d\mathbb{P}\right) \leq \int \phi(f) d\mathbb{P},$$

siempre que $\int |f| d\mathbb{P} < \infty$ y $\int |\phi(f)| d\mathbb{P} < \infty$. Demostrar que la igualdad se cumple si y sólo si $f \equiv c$ c.t.p.$[\mu]$.

17. Demostrar que si $f, g \in L_\infty$ entonces $f + g \in L_\infty$ y $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

18. (Proposición 6.5, caso $p = \infty$) Demostrar que si $f, g \in L_\infty$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $af + bg \in L_\infty$.

19. (Observación de la Proposición 6.6) Demostrar el siguiente lema: $f_n \to f$ c.t.p.$[\mu]$ si, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

20. **(a)** Todo lo que sea $\|\cdot\|_\infty$ (Hölder, etc.).

(b) Todo lo relativo a la norma infinito, visto en clase para $1 \leq p < \infty$ (Minkowsky, etc.).