Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT
Tarea 8
Fecha de entrega: martes 14 de noviembre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión
Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez
José Ángel Sánchez Gómez

0. **(a)** Explicar por qué se cree que se dejó cada ejercicio.

(b) Proponer posibles extensiones y generalizaciones de cada ejercicio.

1. (Problema 5.3, Athreya y Lahiri) Sean μ_i, $i=1,2$ dos medidas σ-finitas en $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Sean $D_i=\{x:\mu_i(\{x\})>0\}$, $i=1,2$.

(a) Demostrar que $D_1\cup D_2$ es numerable.

(b) Sean $\phi_i(x)=\mu_i(\{x\})$, $x\in\mathbb{R}$, $i=1,2$. Demostrar que ϕ_i, $i=1,2$ son Borel-medibles.

(c) Demostrar que

$$\int \phi_1 d\mu_2 = \sum_{z\in D_1\cap D_2} \phi_1(z)\phi_2(z).$$

(d) De **(c)**, deducir

$$\begin{aligned}\mu_1\times\mu_2(C) &= \int_{(a,b]} \mu_2(C_x)\mu_1(dx)\\ &= \int_{(a,b]} \mu_2(\{x\})\mu_1(dx) = 0.\end{aligned}$$

2. (Problema 5.4, Athreya y Lahiri) Extender el teorema de integración por partes (5.2.3) demostrando lo siguiente. Sean F_1, F_2 dos funciones no decrecientes y continuas por la derecha en $[a,b]$, y ϕ_1 como en el ejercicio anterior. Entonces

$$\int_{(a,b]} F_1 dF_2 + \int_{(a,b]} F_2 dF_1 = F_1(b)F_2(b) - F_1(a)F_2(a) + \int_{(a,b]} \phi_1 d\mu_2.$$

3. (Problema 5.5, Athreya y Lahiri) Sean $F_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=1,2$ funciones no decrecientes y continuas por la derecha. Sea ϕ_1 como en el ejercicio anterior. Demostrar que si $\lim_{b\uparrow\infty} F_1(b)F_2(b)=\lambda_1$ y $\lim_{a\downarrow-\infty} F_1(a)F_2(a)=\lambda_2$ existen y son finitos, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} F_1 dF_2 + \int_{\mathbb{R}} F_2 dF_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + \int_{\mathbb{R}} \phi_1 d\mu_2.$$

4. (Problema 5.6, Athreya y Lahiri) Sea $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ un espacio de medida σ-finito y sea f una función no negativa medible. Demostrar que

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(\{f\geq t\})dt.$$

(Sugerencia: Considerar el espacio producto de $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ con $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$, λ la medida de Lebesgue, y aplicar el teorema de Tonelli a la función $g(\omega, t) = 1(f(\omega) \geq t)$, después de demostrar que g es $\mathscr{F} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-medible.)

5. (Problema 5.7, Athreya y Lahiri) Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ una variable aleatoria.

(a) Demostrar que para toda $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ absolutamente continua

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(X)dP &= h(0) + \int_{[0,\infty)} h'(t)P(X \geq t)dt \\ &= h(0) + \int_{(0,\infty)} h'(t)P(X > t)dt.\end{aligned}$$

(Sugerencia: Aplicar el teorema de Tonelli a la función $f(t, \omega) \equiv h'(t)1(X(\omega) \geq t)$ en el espacio de medida producto $([0,\infty) \times \Omega,\ \mathscr{B}([0,\infty)) \times \mathscr{F},\ \lambda \times P)$.)

(b) Demostrar que, para $0 < p < \infty$,

$$\int_\Omega X^p dP = \int_{[0,\infty)} pt^{p-1} P(X \geq t)dt.$$

(c) Demostrar que, para $0 < p < \infty$,

$$\int_\Omega X^{-p} dP = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{[0,\infty)} \psi_X(t) t^{p-1} dt,$$

donde $\Gamma(p) = \int_{[0,\infty)} e^{-t} t^{p-1} dt$, $p > 0$, y $\psi_X(t) = \int_\Omega e^{-tX} dP$, $t \in \mathbb{R}_+$.

6. (Problema 5.8, Athreya y Lahiri) Sean $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ Borel-medibles. Sea $A = \{(x,y) : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$.

(a) Demostrar que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.

(b) Demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,g(x)]} f(x,y)\lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \int f 1_A d\lambda^{(2)},$$

donde $\lambda^{(2)}$ es la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$.

(c) Si g es continua y estrictamente creciente, demostrar que las dos integrales de **(b)** son iguales a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[g^{-1}(y),\infty)} f(x,y)\lambda(dx) \right) \lambda(dy).$$

7. (Problema 5.10, Athreya y Lahiri) Demostrar que $I \equiv \int_0^\infty \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{\pi/2}$.

(Sugerencia: Por el teorema de Tonelli, $I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-(x^2+y^2)/2)dxdy$. Usar el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \in (0,\infty)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.)

8. (Problema 5.11, Athreya y Lahiri) Sea μ una medida finita en $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ no decrecientes. Demostrar que

$$\mu(\mathbb{R}) \int fgd\mu \geq \left(\int fd\mu \right) \left(\int gd\mu \right).$$

(Sugerencia: Considerar $h(x,y) = (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y))$ en $\mathbb{R}^2$ e integrar con respecto a $\mu \times \mu$.)

9. Formular y demostrar la siguiente proposición: Para demostrar que dos variables aleatorias son independientes solamente es necesario verificar la condición de independencia en conjuntos del producto cartesiano de π-sistemas.

10. Elegir y resolver otros dos problemas del Capítulo 5 de Athreya y Lahiri, indicando la razón de la elección.

11. Demostrar o dar un contraejemplo: Sean $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ dos espacios de medida, y $A \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$. Defínanse $A_{x_1} = \{x_2 \in \Omega_2 : (x_1, x_2) \in A\}$ (la x_1-sección de A), y $A_{x_2} = \{x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in A\}$ (la x_2-sección de A). Entonces A es $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-medible si, y sólo si, A_{x_i} es $\mathscr{F}_j$-medible, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

12. Dos variables aleatorias X_1, X_2 definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ son independientes si $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Demostrar que esto es equivalente a $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)$, para todo $A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Es decir, $P\left(X_1^{-1}(A_1) \cap X_2^{-1}(A_2)\right) = P\left(X_1^{-1}(A_1)\right) P\left(X_2^{-1}(A_2)\right)$.