Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT

Tarea 7

Fecha de entrega: martes 31 de octubre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión

Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez

José Ángel Sánchez Gómez

0. **(a)** Explicar por qué se cree que se dejó cada ejercicio.

(b) Proponer posibles extensiones y generalizaciones de cada ejercicio.

1. (Proposición 5.2 (ii)) Sea μ una medida σ-finita, y sean f y g funciones μ-integrables tales que

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \quad \forall A \in \mathscr{F}. \tag{1}$$

(a) Demostrar que $f = g$ casi en todas partes c.t.p.$[\mu]$.

(b) Dar un ejemplo de que (1) no implica $f = g$ c.t.p.$[\mu]$ si μ no es σ-finita.

(c) Demostrar que se puede dar una hipótesis sobre $\mathscr{F}$ más débil que (1).

2. (Ejercicio 8.N, Bartle) (Nota: Demostrado en clase.) Sean λ, μ medidas σ-finitas en $(\Omega, \mathscr{F})$ tales que $\lambda \ll \mu$, y sea $f = d\lambda/d\mu$. Demostrar que, para cualquier función g $\mathscr{F}$-medible y no-negativa,

$$\int g d\lambda = \int g f d\mu.$$

(Sugerencia: Considerar primero funciones simples y aplicar el teorema de convergencia monótona.)

3. (Ejercicio 8.O, Bartle) Sean λ, μ, ν medidas σ-finitas en $(\Omega, \mathscr{F})$. Usar el ejercicio anterior para demostrar lo siguiente:

(a) Si $\nu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$, entonces

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu}, \quad \text{c.t.p.}[\mu].$$

(b) Si $\lambda_j \ll \mu$, $j = 1, 2$, entonces

$$\frac{d}{d\mu}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \frac{d\lambda_2}{d\mu}, \quad \text{c.t.p.}[\mu].$$

4. (Ejercicio 8.P, Bartle) Si λ y μ son medidas σ-finitas, $\lambda \ll \mu$, y $\mu \ll \lambda$, entonces

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{d\mu/d\lambda}, \quad \text{c.t.p.}$$

5. (Ejercicio 8.Q, Bartle) Si λ y μ son medidas, con $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$ (*mutuamente singulares*, i.e. existen conjuntos $A, B \in \mathscr{F}$ disjuntos tales que $\Omega = A \cup B$ y $\lambda(A) = \mu(B) = 0$), entonces $\lambda = 0$.

6. **(a)** Escribir lo correspondiente a condiciones de regularidad (dependencia de parámetro), en términos del valor esperado.

(b) Dar dos ejemplos donde se satisfagan las condiciones de regularidad, uno discreto y uno (absolutamente) continuo.

(c) Dar un ejemplo donde no se satisfagan las condiciones de regularidad.

7. Sean $\mathscr{F}_i$, $i = 1, 2$, dos semi-álgebras. Demostrar que

$$\mathscr{R} = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathscr{F}_i,\ i = 1, 2\}$$

es una semi-álgebra.