Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT

Tarea 6

Fecha de entrega: martes 10 de octubre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión

Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez

José Ángel Sánchez Gómez

0. **(a)** Explicar por qué se cree que se dejó cada ejercicio.

(b) Proponer posibles extensiones y generalizaciones de cada ejercicio.

1. Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio medible, y $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$, funciones $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}})$-medibles. Defínanse

$$A = \{x \in \Omega : \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ |f(x)| < \infty\},$$
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathbb{I}_A(x).$$

Demostrar que g es una función $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}})$-medible.

2. (Teorema) (Aproximación de funciones medibles) Demostrar, completando la demostración vista en clase, el siguiente teorema: Sea $(\Omega, \mathscr{F})$ un espacio medible, y $f : \Omega \to [0,\infty)$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funciones simples $f_n : \Omega \to [0,\infty)$ medibles tales que $f_n \uparrow f$ (i.e. $f_n(x) \uparrow f(x)$, y $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para toda $x \in \Omega$).

3. (Proposición 2.1.3, Athreya y Lahiri) Demostrar con detalle la siguiente proposición: Sean $f_1, \ldots, f_k$, $k \in \mathbb{N}$, transformaciones de Ω a $\mathbb{R}$ $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R})$-medibles. Entonces,

(i) $f = (f_1, \ldots, f_k)$ es $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$-medible.

(ii) $g = \sum_{i=1}^k f_i$ es $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R})$-medible.

(iii) $h = \prod_{i=1}^k f_i$ es $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R})$-medible.

(iv) Si $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, es continua, entonces $\xi \equiv \psi \circ f$ es $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$-medible, con $f = (f_1, \ldots, f_k)$.

4. (Corolario 2.1.4, , Athreya y Lahiri) Demostrar el siguiente corolario: La colección de funciones $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R})$-medibles de Ω a $\mathbb{R}$ es cerrada bajo la suma y el producto puntuales, así como bajo el producto por un escalar.

5. (Problema 2.6, Athreya y Lahiri) Sean X_i, $i = 1,2,3$, variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Considerar la ecuación estocástica, en $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1(\omega)t^2 + X_2(\omega)t + X_3(\omega) = 0. \tag{1}$$

(a) Demostrar que $A \equiv \{\omega \in \Omega : (1) \text{ tiene dos raíces distintas}\} \in \mathscr{F}$.

(b) Sean $T_1(\omega)$ y $T_2(\omega)$ las dos raíces de (1) en A. Sean

$$f_i(\omega) = \begin{cases} T_i(\omega) & \text{en } A, \\ 0 & \text{en } A^c, \end{cases}$$

$i = 1, 2$. Demostrar que (f_1, f_2) es $\mathscr{F} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-medible.

6. Elaborar un resumen, con demostraciones, del material de la página 44 del libro de Athreya y Lahiri, hasta antes de la Sección 2.2.