Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT
Tarea 4
Fecha de entrega: martes 26 de septiembre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión
Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez
José Ángel Sánchez Gómez

0. Explicar por qué se cree que se dejó cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Demostrar que si $[a_0, b_0] \subset \cup_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$ entonces

$$\mu_F((a_0, b_0]) \equiv F(b_0) - F(a_0) \leq \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i)) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_F((a_i, b_i]).$$

2. (Invarianza bajo translaciones de la medida de Lebesgue.) Sea λ la medida de Lebesgue definida en el semi-anillo de los intervalos de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, y defínase $E \oplus x = \{x + y : y \in E\}$. Demostrar lo siguiente:

- **(a)** Si $E \subset \mathbb{R}$, entonces $\lambda^*(E \oplus x) = \lambda^*(E)$.
- **(b)** Si $E \in \mathscr{F}_{\lambda^*}$, entonces $E \oplus x \in \mathscr{F}_{\lambda^*}$ y $\lambda(E \oplus x) = \lambda(E)$.
- **(c)** Si $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, entonces $E \oplus x \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ y $\lambda(E \oplus x) = \lambda(E)$.

Sugerencia: $(x \oplus E_1) \cap E_2 = x \oplus (E_1 \cap (-z) \oplus E_2)$ y $x \oplus E^c = (x \oplus E)^c$.

3. Enunciar y demostrar el siguiente teorema: La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es la única medida (módulo constante positiva multiplicativa) que es invariante bajo translaciones.

4.
- **(a)** Demostrar que el conjunto de Cantor tiene medida de Lebesgue igual a cero. Esto es un ejemplo de un conjunto no numerable que tiene medida de Lebesgue cero.
- **(b)** ¿Cuál es la medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F del conjunto de Cantor cuando F es una función de distribución continua?
- **(c)** Dar una función de distribución F tal que la medida μ_F del conjunto de Cantor no sea cero.