Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT
Tarea 3
Fecha de entrega: martes 12 de septiembre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión
Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez
José Ángel Sánchez Gómez

1. (Teorema 1.2.4 de Athreya y Lahiri) (Unicidad de medidas) Sean μ_1 y μ_2 dos medidas finitas en un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$. Sea $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ un π-sistema tal que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$. Demostrar que si $\mu_1(C) = \mu_2(C)$ para todo conjunto $C \in \mathscr{C}$ y si $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$, entonces $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo conjunto $A \in \mathscr{F}$.

2. (Teorema 1.3.6 y Problema 1.26 de Athreya y Lahiri) (Teorema de Caratheodory y unicidad de la extensión en anillos) Una medida μ es σ-finita en un semi-anillo $\mathscr{R}$ si para todo conjunto $E \in \mathscr{P}(\Omega)$ existen $E_1, E_2, \ldots \in \mathscr{R}$ tales que $\mu(E_n) < \infty$ y $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Demostrar que si μ es σ-finita en $\mathscr{R}$ y ν es una medida en $(\Omega, \sigma(\mathscr{R}))$ tal que $\nu(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathscr{R}$, entonces $\nu = \mu^*$ en $\sigma(\mathscr{R})$.

Sugerencia: Seguir los siguientes pasos (Problema 1.26):

(a) Suponer que $\nu(\Omega) < \infty$. Verificar que $\mathscr{L} \equiv \{A : A \in \sigma(\mathscr{R}), \mu^*(A) = \nu(A)\}$ es un λ-sistema y usar el teorema λ-π.

(b) Extender lo anterior para el caso σ-finito.

3. (Extensión de la medida de conteo) Sea μ la medida de conteo en $\mathbb{N}$ y $\mathscr{R}$ el semi-anillo de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Sea μ^* la medida exterior generada por μ y $\mathscr{M}_{\mu^*}$ la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles. Demostrar que $\mathscr{M}_{\mu^*} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ y $\mu = \mu^*$.

4. (Problema 1.31 de Athreya y Lahiri) ($\mathscr{M}_{\mu^*}$ es la completación de $\sigma(\mathscr{C})$ con respecto a μ^*) Sea μ una medida en una semi-álgebra $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ con $\Omega \neq \emptyset$. Sea μ^* la medida exterior generada por μ y sea $\mathscr{M}_{\mu^*}$ la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles.

(a) Demostrar que para todo $A \subset \Omega$ existe $B \in \sigma(\mathscr{C})$ tal que $A \subset B$ y $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.
Sugerencia: Si $\mu^*(A) = \infty$, tomar $B = \Omega$. Si $\mu^*(A) < \infty$, usar la definición de μ^* para demostrar que para cada $n \geq 1$ existen $\{B_{nj}\}_{j\geq 1} \subset \mathscr{C}$ tales que $A \subset B_n \equiv \cup_{j\geq 1} B_{nj}$, $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_{nj}) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Tomar $B = \cap_{n\geq 1} B_n$.

(b) Demostrar que para todo $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ con $\mu^*(A) < \infty$, existe $B \in \sigma(\mathscr{C})$ tal que $A \subset B$ y $\mu^*(B \setminus A) = 0$.
Sugerencia: usar **(a)** y la relación $B = A \cup (B \setminus A)$ con A y $B \setminus A = B \cap A^c$ en $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

(c) Demostrar que si μ es σ-finita (i.e. existen Ω_n, $n \geq 1$ en $\mathscr{C}$ con $\mu(\Omega_n) < \infty$ y $\cup_{n\geq 1} \Omega_n = \Omega$), entonces en (b) la hipótesis de que $\mu^*(A) < \infty$ puede ser omitida.
Sugerencia: Suponer s.p.g. que $\{\Omega_n\}_{n\geq 1}$ son disjuntos. Aplicar **(b)** a $\{A_n \equiv A \cap \Omega_n\}_{n\geq 1}$.

(d) Demostrar que si μ es σ-finita, entonces $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ si y sólo si existen $B_1, B_2 \in \sigma(\mathscr{C})$ tales que $B_1 \subset A \subset B_2$ y $\mu^*(B_2 \setminus B_1) = 0$.

Sugerencia: Aplicar **(c)** a A y A^c.