Medida, Integración y Probabilidad, CIMAT
Tarea 2
Fecha de entrega: martes 5 de septiembre de 2017

Profesor: Dr. Víctor Pérez-Abreu Carrión
Ayudantes: Adrián de Jesús Celestino Rodríguez
José Ángel Sánchez Gómez

1. Elaborar un resumen del tema de semi-anillos, anillos y σ-anillos. Dar ejemplos que no son semi-álgebra, álgebra y σ-álgebra, respectivamente.

2. Considerar $\mathbb{N}$ con la medida de conteo, y sea $\mathscr{C}$ la colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ con medida de conteo finita. Demostrar que $\mathscr{C}$ es un anillo y que no es álgebra. Determinar el σ-anillo generado por $\mathscr{C}$.

3. Considerar el semi-anillo $\mathscr{P} = \{(a,b] : -\infty < a \leq b < \infty\}$. Demostrar que la σ-álgebra generada por $\mathscr{P}$ es la σ-álgebra de Borel.

4. Sea $\Omega = [0,1]$, y considerar la semi-álgebra $\mathscr{S} = \Omega \cup \{(a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{[0,c] : 0 \leq c \leq 1\}$. Sea $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ el álgebra de uniones finitas de elementos de $\mathscr{S}$, y μ la medida de longitud definida en $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ con la propiedad de aditividad.

(a) Demostrar que μ está bien definida (informalmente, es independiente de la representación del argumento).

(b) Demostrar que $\sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{A}(\mathscr{S})) = \mathscr{B}(\Omega)$.

5. Sea μ una función de conjuntos finita, definida en un álgebra $\mathscr{A}$. Demostrar que lo siguiente es equivalente:

(i) μ es σ-aditiva en $\mathscr{A}$.

(ii) μ es aditiva en $\mathscr{A}$ y continua por arriba en el vacío.