Reseña de: F. William Lawvere and Stephen H. Schanuel, Matemáticas Conceptuales : Una primera introducción a las categorías, Siglo XXI Editores, 2002

Marta Bunge

Department of Mathematics and Statistics,
McGill University, Montréal, Québec, Canada H3A 2K6

Los objetivos del libro de F. William Lawvere y Stephen H. Schanuel, *Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a las categorías*, están enunciados claramente al comienzo de la Sesión I: "En éste libro pretendemos explorar las consecuencias de una concepción nueva y fundamental de la naturaleza de las matemáticas, la cual ha conducido a métodos mejores para comprender y utilizar los conceptos matemáticos". Se trata, pues, de transmitir una nueva manera de pensar, diferente de la habitual, la que está basada en una teoría de conjuntos rígida, mientras que esta nueva manera está concebida para poder captar mejor nociones dinámicas, a la vez con una gran economía de conceptos y elegancia en los métodos. La edición castellana es una traducción del original inglés (Cambridge University Press), llevada a cabo por Francisco Marmolejo Rivas, con gran cuidado y en consulta frecuente con los autores.

Como todo punto de vista nuevo, éste requiere que el lector se sumerja en el estudio de casos sencillos pero que ya reflejan todos los aspectos en los cuales esta concepción difiere de las anteriores. No se trata de olvidar lo conocido si es que se lo conoce, sino más bien de verlo de una manera distinta, lo que requiere de parte del lector un poco de humildad y una gran dosis de confianza en los autores, quienes consiguen admirablemente su objetivo. La manera más recomendable de leer este libro, según mi parecer, es del principio al fin, admitiendo que al así hacerlo, se encontrará a ratos con pasajes supuestamente triviales, y otras veces con trozos aparentemente bastante más difíciles. Solamente así podrá el lector captar el hilo conductor y adquirir gradualmente las nociones importantes, las que reaparecen en distintas formas a lo largo del libro.

Trataré ahora de dar una idea, necesariamente esquemática, del contenido del libro, haciendo notar sus puntos salientes.

La noción básica es la de "categoría", la que aquí se identifica con la de "universo matemático". Normalmente, la teoría de conjuntos será, para la mayor parte de los lectores, el único universo matemático con el que se hayan topado hasta ahora. No es cuestión de abandonarla sino de verla como un ejemplo más de la noción de categoría, ya que hay otros y bien distintos de ella. Sin embargo, para hacer el libro accesible a lectores interesados con poca formación matemática (acaso sean filósofos), los ejemplos que se dan se construyen a partir de los conjuntos, y ellos bastan para ilustrar todos los aspectos que los autores desean desarrollar.

La noción principal en una categoría es la de "morfismo", la que puede imaginarse como un proceso para pasar de un objeto a otro objeto de la categoría. Un ejemplo útil para captar la noción de morfismo está dado por el análisis que hizo Galileo del vuelo (irregular) de un ave, imaginando que el ave no solamente se desplaza en un mismo plano en cualquier direccion, sino que también sube y baja. Un morfismo del espacio al plano es la proyeción de la sombra del ave en vuelo, pero este morfismo no basta para captar el vuelo del ave, ya que no indica las alturas variables a las que vuela. Un segundo morfismo, que va del espacio a la línea, y que asigna el nivel, completa esta descripción. Éste es un caso particular de la noción de espacio producto (por ejemplo un cilindro como producto de un disco y un segmento de línea) y de sus dos proyecciones ("vertical" y "horizontal"), las que juntas bastan para determinar el vuelo del ave en un cierto intervalo de tiempo (éste será otro morfismo, del tiempo al espacio, el que se "compone" con las proyecciones).

Pero antes de pasar a examinar productos y otras nociones más complicadas, se trata de comprender a fondo las peculiaridades de diversos tipos de morfismos, como las identidades, y crucialmente la naturaleza de la composición de morfismos. No todo lo que se discute en esta parte es como para pasar por alto, particularmente las nociones de morfismos que son ó bien secciones ó bien retracciones son muy interesantes. Está claro que no es lo mismo elegir un representante de una clase de objetos con una cierta propiedad, que asignar una propiedad a un objeto de la clase de todos los objetos considerados. Los autores dan una gran variedad de ejemplos de la vida diara para ilustrar estos conceptos importantísimos.

Es interesante observar que los problemas de encontrar secciones o de encontrar retracciones de un morfismo dado son problemas "de división", por analogía con los números. Pero, citando a los autores, "los conjuntos abstractos, (si bien) son poco más que números, ésta pequeña diferencia es suficiente para permitirles tener estructuras fructíferas que los números no pueden tener".

La idea de morfismo $f : A \longrightarrow B$ puede encapsularse de dos modos distintos. Una manera es ver a A como parámetro y a f como parametrizando los elementos de B. Análogamente, el morfismo puede verse, de manera geométrica, como asignando una figura de tipo A en B. Una manera distinta de ver el morfismo $f : A \longrightarrow B$ es la de dar una clasificación de los elementos de A de acuerdo con una cierta propiedad en B. Estas interpretaciones y otras permiten reproducir la teoría de cardinalidad de conjuntos de Cantor completamente en términos de morfismos.

El broche de oro de las secciones anteriores (Artículos I y II) se encuentra en el Artículo III, en el que se trata de explicar, en términos ya adquiridos (como el concepto de retracción), los teoremas de punto fijo de Brouwer. Por ejemplo, "todo endomorfismo continuo de un disco tiene un punto fijo" se transforma, por un teorema de retracción, en "si no hay una retracción continua del disco a su frontera, entonces todo morfismo continuo del disco en sí mismo tiene un punto fijo", lo que a su vez se transforma (de manera contrapositiva) en "dado un endomorfismo continuo del disco en sí mismo sin puntos fijos, se puede construir una retracción continua del disco a su frontera". La demostración de esto último es sumamente sencilla. Pero este tipo de demostración viola un principio constructivista y de la lógica intuicionista, y por lo tanto no es universalmente aceptado. Si bien por un lado, la demostración misma del teorema (o los teoremas) de punto fijo de Brouwer valen en toda categoría cuyos objetos tengan algún tipo de "cohesión" y cuyos morfismos la preserven, por otro lado, hay muchas categorías interesantes en las que el teorema no es verdadero (y esto se debe a que la lógica interna de dichos universos matemáticos no es clásica sino intuicionista).

Ahora sí que el lector estará (quizás) mejor dispuesto y motivado para continuar el estudio del resto del libro. La tercera parte, sobre todo, sobre conjuntos estructurados, encierra muchas sorpresas. He aquí que hay categorías, muy útiles por otra parte, que son bien diferentes de la categoría de los conjuntos, si bien se construyen enteramente a partir de ella. Estos son los ejemplos de conjuntos "dinámicos", ó sea que además de puntos poseen una estructura interna que relaciona pares de puntos, no siempre distintos, no siempre todos los puntos. Se tiene entonces, la categoría de los conjuntos X con un endomorfismo α dado, cuyos morfismos deberán preservar (ó commutar, ó ser compatible con) dichos endomorfismos dados. Se podrá también considerar dos "subcategorías" de ésta, aquella donde los únicos endomorfismos $\alpha : X \longrightarrow X$ que se consideren son los idempotentes (o sea $\alpha\alpha = \alpha$), y otra donde se restringe uno a los morfismos invertibles. Los gráficos que representan dichos conjuntos tienen características diversas y es divertido estudiarlos. Otro ejemplo es la categoría de todos los gráficos, la que contiene a las anteriores como subcategorías. Aquí es dónde aparece, por primera vez en el libro, la noción de "functor" entre dos categorías. No se trata solamente de asignar, a un par (X, α), donde X es un conjunto y α un endomorfismo de X, su gráfico que consiste en el conjunto F de todas la "flechas" $x \longrightarrow \alpha(x)$, y de los dos morfismos "salida" y "llegada" de F en X, sino de asignar también, a cada morfismo $f : (X, \alpha) \longrightarrow (Y, \beta)$ (lo que significa simplemente que $f : X \longrightarrow Y$ y que se satisface la ecuación $\beta f = f\alpha$), un morfismo de gráficos correspondientes. Hay muchísimos functores de interés en matemáticas, pero el que se acaba de dar está completamente descripto en el libro y no requiere ninguna noción que no haya sido introducida previamente. A esta altura ya pueden introducirse de manera más formal (y que quizás resulte un tanto repetitivo, pero necesario) la noción de conjunto con estructura y la de morfismo que preserva la estructura.

Así se llega de manera natural a los monoides y sus acciones. Se discute en este contexto las "propiedades positivas" que son preservadas por los morfismos, y las "propiedades negativas" que son reflejadas por ellos. Entre las propiedades por así decir positivas se encuentra la accesibilidad de un elemento x de X por la dinámica α, y entre las por así decir negativas se encuentra la propiedad de que x no sea un punto fijo (de la dinámica α de X).

Antes de continuar con la descripción de los aspectos fascinantes de este libro, nos detenemos a considerar los problemas que se dan a cada paso, así como las clases (no ficticias) con alumnos (tampoco ficticios, ni siquiera sus nombres lo son) de diferente formación y poca o distinta base matemática. Si bien es cierto que a pocos de estos problemas se les da una solución inmediata, en el caso de gran parte de ellos dicha solución se encuentra en el lugar menos pensado del texto, o séa que lo mejor para encontrar las soluciones, aparte de pensarlas uno mismo, es seguir con la lectura. Otro aspecto en el que este libro difiere de otros más convencionales, y que se relaciona con lo que acabo de escribir, es que trata de enseñar a pensar y no solamente a encontrar soluciones. Para ser justos, estas virtudes solamente podrán apreciarse al concluir la lectura o el estudio del libro, de manera que es posible que se le escapen al lector apresurado.

Un estudio serio sobre categorías de "procesos" no es algo fácil; lo que aquí se intenta es nada más que mostrar algunos de sus aspectos. Por ejemplo, cómo describir los subsistemas estables de un conjunto dinámico (X, α); hace falta un conjunto Ω con infinitos valores "finitos" $0, 1, 2, 3, \ldots$. y un valor ∞, con una dinámica interna que envía $n+1$ a n y que hace de 0 y de ∞ estados en reposo.

El problema de Galileo mencionado anteriormente involucraba un conjunto producto, y sus proyecciones, y está dado por una propiedad universal. Lo mismo ocurre con un objeto terminal 1 (si existe), y otras construcciones, cada una de las cuales posee una dual (cambiando el sentido de las flechas). El tener a la vez "sumas" y "productos" sugiere preguntarse si vale en general una ley distributiva, como para los números. Ésta se expresa mediante un morfismo canónico $(A\times B)+(A\times C) \longrightarrow A\times(B+C)$, y la distributividad consiste en que dicho morfismo sea un isomomorfismo (o sea, invertible). De manera análoga puede uno preguntarse si el morfismo canónico $0 \longrightarrow A \times 0$, donde 0 es el objeto inicial (si existe), es un isomorfismo. Tales categorías, donde ambos morfismos son isomorfismos, se denominan "distributivas". Curiosamente (o no) todos los ejemplos considerados hasta ahora son categorías distributivas, pero he aquí uno, igualmente natural y fácil de explicar, que no lo es: la categoría de los conjuntos "punteados" (X, x), cuyos morfismos $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ consisten de aquellas funciones $f : X \longrightarrow Y$ tales que $f(x) = y$. Por ejemplo, la suma (o mejor dicho, el coproducto) de dos conjuntos punteados necesariamente fuerza la identificación de los dos puntos elegidos.

La noción de "punto" de un objeto A de una categoría con objeto terminal 1 (nada más que una notación) se define como un morfismo $1 \longrightarrow A$. Mientras que la noción de morfismo $A \longrightarrow 1$ es trivial (hay uno sólo), la de punto de A no lo es. Esto nos lleva a considerar puntos de un producto denotado $A \times B$, equipado con sus proyecciones $p_A : (A \times B) \longrightarrow A$ y $p_B : (A \times B) \longrightarrow B$, los que, por la propiedad universal, corresponden precisamente a pares de puntos (de A, respectivamente, de B). Se dice, de manera algo informal, que los pares de puntos están dados (o coinciden con) "las proyecciones de un punto" de $A \times B$. Lo que falta por explicar es la noción de "proyección de un punto de $A \times B$" lo que significa, para un punto $1 \longrightarrow (A \times B)$, su composicion con cada una de las proyecciones p_A , p_B.

Hay muchísimo más en este libro que lo se podría resumir o comentar en una mera reseña, de manera que me parece preferible que el lector lo descubra por sí mismo. La única advertencia (hecha ya, por otra parte) es la de no desanimarse por la manera "errática" de tratar asuntos supuestamente triviales, intercalados con otros mucho más difíciles por cierto, pero de ninguna manera imposibles con los conocimientos adquiridos en las secciones que los preceden.

Algo que hay que notar, es que (como decimos los argentinos) "como quien no quiere la cosa", los autores logran dar la noción de "topos", bella y útil a la vez, sin el menor esfuerzo. Por ejemplo, muestran que suponer que si un objeto A es exponenciable, es decir, que existen objetos de morfismos X^A para cualquier objeto X, entonces, la ley distributiva enunciada es válida. Esto se haría, en un texto formal, introduciendo la noción de adjunto, de (co)límite, y observando que el endofunctor $A \times (-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ de la categoría $\mathcal{C}$ en cuestión en la que "vive" el objeto A, tiene un adjunto a derecha, $(-)^A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, y a partir de allí se daría una demostración general de la distributividad. Lo que se hace aquí, es dar "la misma" demostración, pero sin siquiera mencionar esos otros conceptos más complicados, ejemplificados perfectamente en este único caso dado. Para un libro de este nivel, es la solución ideal, además de que lo hecho contiene ya el germen del argumento general, una vez que los conceptos adecuados sean introducidos, lo que no se hace aquí.

Los autores no desaprovechan una oportunidad magnífica de dar un argumento original de la demostración del teorema diagonal de Cantor, relacionándolo una vez más con un teorema de punto fijo "positivo". No solamente es esta demostración muy simple sino que se ve que es válida en cualquier categoría con productos, lo que, como observan los autores, fué un hecho explotado (implícitamente) por Russell en los 1900 y por Gödel en los años 30 para inferir las famosas "paradojas".

Hago hincapié en el hecho de que la teoría de los topos, en su estado inicial al menos, encuentra en la sección 33 su mejor exposición, lo que no es de extrañar, teniendo en cuenta que uno de los autores, a saber, F. Willliam Lawvere, fué el iniciador de dicha teoría, luego formalizada conjuntamente con Myles Tierney. Casi todos los ejemplos de conjuntos dinámicos son ejemplos de topos, así como lo es la categoría de los conjuntos; en cambio, la categoría de los conjuntos punteados no es un topos, ya que no es distributiva (o sea que no puede tener exponentiación para todos sus objetos).

Para terminar, debo decir que éste es un libro bellísimo y que los autores logran, a través de ejemplos sencillos, ilustrar una gran variedad de conceptos y de argumentos tan profundos como los que llevan a una demostración de los teoremas de punto fijo de Brouwer o al teorema diagonal de Cantor. No es un libro para impresionar, sino para enseñar. Suponemos que un tal libro ha de ser de gran utilidad, sobre todo en Latino-América, con poca gente entrenada en las cuestiones que aquí se tratan. Se necesitaba coraje y mucha sabiduría para emprender tamaña empresa, pero los autores poseen las dos. Es un libro muy apropiado para enseñar la teoría de categorías a cualquier nivel a partir de la preparatoria (en México), así como para iniciar a cualquiera que se interese en aplicar o al menos comprender qué son y para qué sirven las categorías.