第14卷 第4期 应用数学学报 Vol. 14, No. 4
1991年10月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Oct., 1991

高维广义神经传播方程 Cauchy 问题整体光滑解*

梅 茗
(华东地质学院,江西省,抚州市)

GLOBAL SMOOTH SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR GENERALIZED EQUATIONS OF PULSE TRANSMI SSION TYPE WITH HIGER DIMENSION

Mei Ming
(East China Geological Institute)

Abstract

In this paper, the Cauchy problem for a class of nonlinear pseudo-hyperbolic equations of pulse transmission type are studied which arise in biomechanics under the suitably small initial values. The existance and uniqueness of the global smooth solutions for the equations are proved by means of the energy method and the energy decay estimates are obtained too.

一、引 言

我们研究高维非线性伪双曲的更为广泛的神经传播型方程 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f(u,u_t,\nabla u,\nabla u_t)u$$

$$+g(u,u_t,\nabla u,\nabla u_t)\frac{\partial u}{\partial t},\ (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+,\tag{1.1}$$

$$t=0:\ u=u_0(x),\ u_t=u_1(x),\ x\in\mathbb{R}^n.\tag{1.2}$$

神经传播方程,在 1962 年最早为 Nagumo 等[1,2]所提出,其形式为

$$u_{tt}-u_{xxt}=-c_1(1-u+c_2u^2)u_t-u,\tag{1.3}$$

其中 c_1、c_2 为非负常数.近些年来,国内外许多学者对这类方程进行了深刻的研究.M. E. Schonbek[3] 研究了神经脉冲传播中的 Fitzhugh-Nagumo 方程组初边值问题整体经典解存在性,郑宋穆、沈玮熙[4]进一步改进了[3]的结论. C. V. Pao[5] 研究了

本文 1988 年 6 月 13 日收到,1990 年 2 月 23 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助课题.

$$u_{tt} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} - f(t,x,u)u_t - g(t,x,u) \tag{1.4}$$

利用迭代技巧成功地解决了 (1.4) 解的整体存在性。刘亚成等[6] 研究了较 (1.4) 更为广泛的三维神经传播方程初值、初边值问题

$$u_{tt} - \Delta u_t = -f(x,t,u,\nabla u,u_t,\nabla u_t)u_t - g(x,t,u,\nabla u,u_t,\nabla u_t). \tag{1.5}$$

利用 Galerkin 方法得到了其强解的整体存在唯一性。G. Ponce[7] 研究了出现在粘性弹性动力学中一类问题

$$u_{tt} - \nu\Delta u_t - \Delta u = F(\nabla u, u_t, \nabla u_t, u_{x_i x_j}),\quad (x,t)\in R^n \times R_+, \tag{1.6}$$

$$u|_{t=0} = h(x),\quad u_t|_{t=0} = g(x),\qquad x\in R^n \tag{1.7}$$

的光滑解的整体存在唯一性，并得到了形如 $O(t^{-\beta})$ 光滑解的能量衰减估计。

本文所考虑的非线性伪双曲的方程 (1.1)、(1.2) 具有更一般的广泛性，其物理背景来源于生物、力学诸领域，同时又是一类非常重要的非线性发展方程，有着实际意义和理论价值。

本文的基本假设条件是

(H_1) f、$g \in C^{s+2}(R\times R\times R^n\times R^n)$，$s$ 记为 $s > \frac{n}{2}+2$ 的正整数。

(H_2) $f(0,0,0,0) = g(0,0,0,0) < -1$。

由条件 (H_2) 可知

$$\sigma \equiv -g(0,0,0,0) - 1 = -f(0,0,0,0) - 1 > 0$$

根据多元函数的微分中值定理、并注意到条件 (H_1) 中 f, g 的光滑性，可知

当 $|u|$、$|u_t|$、$|\nabla u|$、$|\nabla u_t| < r$ 时，r 为某正常数，成立

$$|f(u,u_t,\nabla u,\nabla u_t) - g(u,u_t,\nabla u,\nabla u_t)| \leqslant \text{const.}(|u| + |\nabla u| + |\nabla u_t| + |u_t|) \tag{1.8}$$

$$|g(u,u_t,\nabla u,\nabla u_t) + 1 + \sigma| \leqslant \text{const.}(|u| + |u_t| + |\nabla u| + |\nabla u_t|) \tag{1.9}$$

其中常数 const. 仅依赖于 r。

为了研究的需要，我们把方程 (1.1)，(1.2) 转化为相互等价的非线性耦合方程组初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v - u, \tag{1.10}$$

$$(x,t)\in R^n\times R_+,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = -\sigma v - u + h(u,v,\nabla u,\nabla v), \tag{1.11}$$

$$t=0:\ u = u_0(x),\ v = u_0(x) + u_1(x),\qquad x\in R^n, \tag{1.12}$$

其中 $\nabla u = (u_{x_1},\cdots,u_{x_n})$，$\Delta$是 Laplace 算子．非线性函数

$$h(u,v,\nabla u,\nabla v) = (f(u,v-u,\nabla u,\nabla v-\nabla u) - g(u,v-u,\nabla u,\nabla v - \nabla u))u + (g(u,v-u,\nabla u,\nabla v-\nabla u) + 1 + \sigma)v. \tag{1.13}$$

我们运用能量方法[8-11] 证明系统 (1.10)—(1.12) 光滑解整体存在唯一性，并得到了解的能量指数衰减估计，这在第二节至第四节中得到表述，第五节我们应用嵌入定理证明

光滑解即为经典解,并得到了经典解的渐近性质,表明古典解随着时间延伸而渐近趋于零。

本文所考虑的问题不同于 G. Ponce[7] 的问题,文中条件(H_2)实际上蕴含了"耗散性(dissipation)"条件,因而使得关于光滑解的讨论中无需对空间维数 n 进行限制(文献[7]要求对维数 n 进行限制),本文的工作独立于 G. Ponce 的结论,同时又是[3—7]的补充、拓广和加强。

下面给出本文的一些记号。

$\|\cdot\|$表示 $L^2(R^n)$ 的模,$(,)$表示 $L^2(R^n)$ 的内积,$\|\cdot\|_{H^s}$ 是 $H^s(R^n)$ 的范数,$\|\cdot\|_{C^k}$ 表示空间 $C^i(R^n)$ 的连续模。D记为 $\partial/\partial x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$D^k=\partial^k/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}$,($k=k_1+\cdots+k_n$,$k_i\in N$(自然数))。

空间 $C^i([0,T];X)$ 表示它里面的每一元素 ψ,对于每一个 $t\in[0,T]$ 在X的拓扑意义下关于 t 是连续可微的。

由嵌入定理可知,存在正常数 R_1,使得对任意的正常数 T,条件 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{H^s}\leqslant R_1$,$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(t)\|_{H^s}\leqslant R_1$ 意味着 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{L^\infty}\leqslant r$,$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(t)\|_{L^\infty}\leqslant r$。

于是对于 $R_1>0$,及任意给定 M_1、$M_2>0$,我们定义一个集合,即对任意 $R<R_1$,$T>0$

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}(0,T\,|\,R,M_1^2,M_2^2)\\
&\quad=\Big\{(u,v)\,|\,u\in C^1([0,T];H^s),\ v\in C^1([0,T];H^{s-2})\\
&\qquad\cap C^0([0,T];H^s)\cap L^2([0,T];H^{s+1}),\\
&\qquad\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2)\leqslant R^2,\\
&\qquad\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H^s}^2+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{H^{s-2}}^2\right)\leqslant M_1^2\\
&\qquad\int_0^T\|v(t)\|_{H^{s+1}}^2dt\leqslant M_2^2\Big\}.
\end{aligned}
$$

记

$$
\begin{aligned}
|||(u,v)|||=&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2)\\
&+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H^s}^2+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{H^{s-2}}^2\right)+\int_0^T\|v(t)\|_{H^{s+1}}^2dt,
\end{aligned}
$$

易知 $\mathscr{D}(0,T\,|\,R,M_1^2,M_2^2)$ 为空间

$$C^1([0,T];H^s)\times\{C^1([0,T];H^{s-2})\cap C^0([0,T];H^s)\cap L^2([0,T];H^{s+1})\}$$

的闭凸子集。

二、光滑解局部存在唯一性

关于复合函数的微分性质,我们给出两个引理,其证明可见于[8,11,12]。

引理 2.1 设 $f\in C^{s+1}(R\times R\times R^n\times R^n)$,$(u,v)\in\mathscr{D}(0,T\,|\,R,M_1^2,M_2^2)$,则对任意 $t\in[0,T]$ 及 $w(x,t)\in C^0([0,T];H^s)$ 成立估计式

$$\|D^p\{f(u, v, \nabla u, \nabla v)w(x, t)\} - f(u, v, \nabla u, \nabla v)D^p w(x, t)\|$$
$$\leqslant C(\|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s})\cdot\|w\|_{H^{p-1}},\ 0 < p \leqslant s-1. \tag{2.1}$$

$$\left\|D^s\{f(u, v, \nabla u, \nabla v)w(x, t)\} - f(u, v, \nabla u, \nabla v)D^s w(x, t) - \frac{\partial f}{\partial \nabla u}\cdot\frac{\partial D^s u}{\partial x}\cdot w(x, t) - \frac{\partial f}{\partial \nabla v}\cdot\frac{\partial D^s v}{\partial x}\cdot w(x, t)\right\|$$
$$\leqslant C(\|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s})\|w\|_{H^{s-1}}, \tag{2.2}$$

其中 $C > 0$ 仅与 R_1 有关，而与 T, u, v, w 无关.

引理 2.2 设 $h \in C^{s+1}(R\times R\times R^n\times R^n)$, $h(0,0,0,0) = 0$, 则对任意 $(u, v)\in \mathscr{D}(0, T|R, M_1^2, M_2^2)$ 及 $t\in[0, T]$ 成立估计式

$$\|D^p h(u, v, \nabla u, \nabla v)\| \leqslant C(\|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s}),\ 0\leqslant p\leqslant s-1 \tag{2.3}$$

$$\left\|D^s h(u, v, \nabla u, \nabla v) - \frac{\partial h}{\partial \nabla u}\cdot\frac{\partial D^s u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial \nabla v}\cdot\frac{\partial D^s v}{\partial x}\right\|$$
$$\leqslant C(\|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s}), \tag{2.4}$$

其中 $C > 0$ 仅与 R_1 有关.

定理 2.1 在假设条件 (H_1)、(H_2) 下，设初值 u_0、$u_1\in H^s$, 且满足

$$\|u_0\|_{H^s}^2 + \|u_1\|_{H^s}^2 \leqslant R_0^2/2,\ R_0 < R/2, \tag{2.5}$$

则存在着依赖于 R_0 的 $t_0 > 0$ 使得系统 (1.10)—(1.12) 存在唯一的光滑解

$$(u, v)\in \mathscr{D}(0, t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2),$$

其中 c'、$c'' > 0$ 为与 R_0 无关的常数.

证 第一步 首先构造方程组 (1.10)—(1.12) 的相应线性化方程组的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U = v, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta V + \sigma V = -u + h(u, v, \nabla u, \nabla v), \tag{2.7}$$

$$t = 0:\ U = u_0(x),\ V = u_0(x) + u_1(x). \tag{2.8}$$

根据抽象线性发展方程理论[13]可知线性问题(2.6)—(2.8)在初值 $u_0, u_1\in H^s$ 情况下，存在唯一解

$$(U, V)\in C^1([0, T]; H^s)\times\{C^1([0, T]; H^{s-2})\cap C^0([0, T]; H^s)\}$$

其中 $(u, v)\in\mathscr{D}(0, T|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$, $T > 0$, c', $c'' > 0$ 表示定性常数.

于是，(2.6)—(2.8) 定义了一个非线性算子 Ψ

$$(U, V) = \Psi(u, v). \tag{2.9}$$

第二步 证明存在 $0 < t_0 < T$, 及 c'、$c'' > 0$, 使得非线性算子 Ψ 将集合 $\mathscr{D}(0, t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$ 映至自身.

(i) 对任意 $(u, v)\in\mathscr{D}(0, T|2R_0, \bar{c}'R_0^2, \bar{c}''R_0^2)$, $\bar{c}'$、$\bar{c}'' > 0$ 为任意给定的正常数，记

$$\mathscr{E} = \{(u, v)\in\mathscr{D}(0, T|2R_0, \bar{c}'R_0^2, \bar{c}''R_0^2)|\ \text{对}\ \forall 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\text{关于}\ x\ \text{有}\ u(x, t)、v(x, t)\in C_0^\infty(R^n)\},$$

显然 $\mathscr{E}$ 在 $\mathscr{D}$ 中稠密. 又设线性化问题 (2.6)—(2.8) 的初值为

$$U|_{t=0} = J_\varepsilon u_0,\ V|_{t=0} = J_\varepsilon(u_0 + u_1) \tag{2.10}$$

其中 J_ε 为软化子 (Mollifiers)

$$J_\varepsilon u_0 = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{R^n} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u_0(y)dy,$$

$$J_\varepsilon(u_0+u_1) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{R^n} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)(u_0(y)+u_1(y))dy. \tag{2.11}$$

我们把由线性问题 (2.6),(2.7),(2.10) 决定的算子记为 Ψ_ε，于是

$$(U,V) = \Psi_\varepsilon(u,v) \in C^1([0,T];H^{s+2}) \times \{C^1([0,T];H^s)\cap C^0([0,T];H^{s+2})\}$$

下面将证存在 $0<t_1\leqslant T$，及 c'、$c''>0$，使得

$$\Psi_\varepsilon:\ \mathscr{E}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)\to\mathscr{D}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2).$$

对于任意的 $(u,v)\in\mathscr{E}(0,T|2R_0,\bar{c}'R_0^2,\bar{c}''R_0^2)$，在 (2.6)、(2.7) 两边进行微分 $D^k(0\leqslant k\leqslant s)$，再分别对应于 D^kU 和 D^kV 作内积，然后关于 t 积分，$t\in[0,T]$ 得到

$$\begin{aligned}&\|D^kU(t)\|^2+\|D^kV(t)\|^2+2\int_0^t\|D^{k+1}V(\tau)\|^2d\tau\\&\quad+2\int_0^t(\|D^kU(\tau)\|^2+\sigma\|D^kV(\tau)\|^2)d\tau\\&=2\int_0^t(D^kh(u,v,\nabla u,\nabla v),D^kV)d\tau\\&\quad+\|D^kU(0)\|^2+\|D^kV(0)\|^2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

由非线性函数 h 的性质及嵌入定理可得

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial\nabla u}\right)\right|\leqslant c_1R_0,\quad\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial\nabla v}\right)\right|\leqslant c_2R_0,\tag{2.13}$$

这里及以后，c_i 均表示与 R_0、T、u、v 无关的正常数。

根据 Schwarz 不等式、Cauchy 不等式 $\left(ab\leqslant\frac{a^2}{2\eta}+\frac{\eta b^2}{2},\ \forall\eta>0\right)$ 通过分部积分，并应用引理 2.2 及 (2.13) 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t(D^kh(u,v,\nabla u,\nabla v),D^kV)d\tau\\&\leqslant\frac{1}{2}c_3R_0^2t+\frac{1}{2}\int_0^t\|D^kV(\tau)\|^2d\tau+\frac{c_4}{2\eta}R_0^2t+\frac{\eta}{2}\int_0^t\|D^{k+1}V(\tau)\|^2d\tau\\&\quad+\frac{1}{2}(c_1R_1+c_2R_1)R_0^2t+\frac{1}{2}\int_0^t\|D^kV(\tau)\|^2d\tau,\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中 η 为任意正常数。于是 (2.12) 为

$$\begin{aligned}&\|D^kU(t)\|^2+\|D^kV(\tau)\|^2+2\int_0^t\|D^{k+1}V(\tau)\|^2d\tau\\&\quad+2\int_0^t(\|D^kU(\tau)\|^2+\sigma\|D^kV(\tau)\|^2)d\tau\\&\leqslant(c_3+c_1R_1+c_2R_1+c_4/\eta)R_0^2+2\int_0^t(\|D^kU(\tau)\|^2+\|D^k(V(\tau)\|^2d\tau\\&\quad+\eta\int_0^t\|D^{k+1}V(\tau)\|^2d\tau+\|D^kU(0)\|^2+\|D^kV(0)\|^2.\end{aligned}\tag{2.15}$$

取 $\eta<2$，令 $c_5=c_3+c_1R_1+c_2R_1+c_4/\eta$，$c_0=2-\eta$. 因而

$$\|D^kU(t)\|^2+\|D^kV(\tau)\|^2+c_6\int_0^t\|D^{k+1}V(\tau)\|^2d\tau$$
$$\leqslant c_5R_0^2t+2\int_0^t(\|D^kU(\tau)\|^2+\|D^kV(\tau)\|^2)d\tau$$
$$+\|D^kV(0)\|^2+\|D^kV(0)\|^2 \tag{2.16}$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|D^kU(t)\|^2+\|D^kV(t)\|^2\leqslant e^{2t}(\|D^kU(0)\|^2+\|D^kV(0)\|^2)+\frac{c_5R_0^2}{2}(e^{2t}-1). \tag{2.17}$$

关于 $k(0\leqslant k\leqslant s)$ 求和，并注意到 $\|J_\varepsilon u_0\|_{H^s}^2+\|J_\varepsilon(u_0+u_1)\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2$ 因而

$$\|U(t)\|_{H^s}^2+\|V(t)\|_{H^s}^2\leqslant e^{2t}R_0^2+\frac{c_5R_0^2}{2}\cdot(e^{2t}-1), \tag{2.18}$$

于是存在 $0<t_1\leqslant T$，当 $t\in[0,t_1]$ 时，一致地有

$$\|U(t)\|_{H^s}^2+\|V(t)\|_{H^s}^2\leqslant 3R_0^2<4R_0^2. \tag{2.19}$$

又由于(2.16)，并就 k 求和，当 $t\in[0,t_1]$ 时一致地有

$$\int_0^t\|V(\tau)\|_{H^{s+1}}^2d\tau\leqslant c_7R_0^2. \tag{2.20}$$

另外，由方程组(1.10)，(1.11)本身可得，对于 $t\in[0,t_1]$ 一致地有

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{H^s}^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|_{H^{s-1}}^2\leqslant c_8R_0^2. \tag{2.21}$$

注 只有在 $h(0,0,0,0)=0$ 情况下才能得到估计式(2.21)，这在研究非退化的拟线性方程时显得尤为突出.

记 $c'=\max\{\bar{c}'',c_8\}$，$c''=\max\{\bar{c}'',c_7\}$

即已证得 Ψ_ε: $\mathscr{E}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)\to\mathscr{D}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$

(ii) 下证 Ψ: $\mathscr{E}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)\to\mathscr{D}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$

对于任意 $(u,v)\in\mathscr{E}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$，记

$$(U_\varepsilon,V_\varepsilon)=\Psi_\varepsilon(u,v),\ (U,V)=\Psi(u,v) \tag{2.22}$$

由于 $(U_\varepsilon,V_\varepsilon)$ 在 $\mathscr{D}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$ 的意义下满足有界性条件(2.19)—(2.21)，根据 Banach-Saks 定理可知，存在一子叙列(仍记为 $\{(U_\varepsilon,V_\varepsilon)\}$) 及 $(\bar{U},\bar{V})$，使之平均收敛于 $(\bar{U},\bar{V})$，通过取极限并由极限的唯一性可知 $(\bar{U},\bar{V})=(U,V)$ $a.e$ 于 $\mathbb{R}^n$. 从而根据 H^s 模的三角不等式得到，对一切 $t\in[0,t_1]$ 一致成立

$$\|U(t)\|_{H^s}^2+\|V(t)\|_{H^s}^2\leqslant 3R_0^2<4R_0^2, \tag{2.23}$$

$$\int_0^t\|V(\tau)\|_{H^{s+1}}^2d\tau\leqslant c''R_0^2, \tag{2.24}$$

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{H^s}^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|_{H^{s-1}}^2\leqslant c'R_0^2. \tag{2.25}$$

(iii) 下证 Ψ 的连续性

设 (u_1,v_1)、$(u_2,v_2)\in\mathscr{E}(0,t_1|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$，记

$$(U_i,V_i)=\Psi(u_i,v_i),\ i=1,2,\ (U,V)=(U_1-U_2,V_1-V_2),$$

$$(u, v) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2),$$

则 (U, V) 满足

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U = v, \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \Delta V + \sigma V = -u + h(u_1, v_1, \nabla u_1, \nabla v_1) - h(u_2, v_2, \nabla u_2, \nabla v_2), \tag{2.27}$$

$$U|_{t=0} = 0, \ V|_{t=0} = 0, \tag{2.28}$$

类似于 (2.12) 的作法得到，对 $\forall t \in [0, t_1]$ 有

$$\begin{aligned}\|D^k U(t)\|^2 + \|D^k V(t)\|^2 + 2\int_0^t \|D^{k+1}V(\tau)\|^2 d\tau \\ + 2\int_0^t (\|D^k U(\tau)\|^2 + \sigma\|D^k V(\tau)\|^2) d\tau \\ = 2\int_0^t (D^k(h(u_1, v_1, \nabla u_1, \nabla v_1) - h(u_2, v_2, \nabla u_2, \nabla v_2)), D^k V) d\tau.\end{aligned} \tag{2.29}$$

应用微分中值定理及引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}&\|D^k(h(u_1, v_1, \nabla u_1, \nabla v_1) - h(u_2, v_2, \nabla u_2, \nabla v_2)\| \\ &\leqslant c_9 R_0(\|u(t)\|_{H^s} + \|v(t)\|_{H^s}).\end{aligned} \tag{2.30}$$

在 (2.29) 中运用 Schwarz 不等式及带 η 的 Cauchy 不等式并注意到 (2.30) 得

$$\begin{aligned}\|D^k U(t)\|^2 + \|D^k V(t)\|^2 + 2\int_0^t \|D^{k+1}V(\tau)\|^2 d\tau \\ + 2\int_0^t (\|D^k U(\tau)\|^2 + \sigma\|D^k V(\tau)\|^2) d\tau \\ \leqslant c_9 R_0 t_1 \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant t_1} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2) + c_9 R_0 \eta \int_0^t \|D^{k+1}V(\tau)\|^2 d\tau,\end{aligned} \tag{2.31}$$

选取适当小的 η，使得 $c_9 R_1 \cdot \eta < 1$，并记 $c_{10} = 2 - c_9 R_1 \eta$，再对于 $k(0 \leqslant k \leqslant s)$ 求和，得到

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{H^s}^2 + \|V(t)\|_{H^s}^2 + c_{10}\int_0^t \|V(\tau)\|_{H^{s+1}}^2 d\tau \\ \leqslant t_1 \cdot (c_9 R_1 s/\eta) \cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant t_1} (\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2), \ t \in [0, t_1].\end{aligned} \tag{2.32}$$

又由方程组 (2.26)、(2.27) 得到

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{H^s}^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|_{H^{s-2}}^2 \leqslant c_{11} \cdot t_1 \sup_{0\leqslant t\leqslant t_1} \Bigg(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H^s}^2 + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{H^{s-2}}^2 \\ + \|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2\Bigg).\end{aligned} \tag{2.33}$$

于是证得了算子 Ψ 连续.

(iv) Ψ 的定义域可拓广到整个闭凸集 $\mathscr{D}$ 上即欲证

$$\Psi: \mathscr{D}(0, t_1 | 2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2) \to \mathscr{D}(0, t_1 | 2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2).$$

由于 $\mathscr{E}$ 稠于 $\mathscr{D}$，对于任意 $(u, v) \in \mathscr{D}$，则存在 $\mathscr{E}$ 中的函数列 $\{(u_\mu, v_\mu)\}$，使得 $(u_\mu, v_\mu) \xrightarrow{H^s} (u, v)$，记 $(U_\mu, V_\mu) = \Psi(u_\mu, v_\mu)$，由 Ψ 的连续性可得

$$(U_\mu, V_\mu) = \Psi(u_\mu, v_\mu) \xrightarrow{H^s} \Psi(u, v) = (U, V), \ \mu \to +\infty. \tag{2.34}$$

因为 (U_μ, V_μ) 具有有界性条件 (2.19)—(2.21)，从而可知 (U, V) 亦满足 (2.19)—(2.21) 即证得

$$\Psi: \mathscr{D}(0, t_1|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2) \to \mathscr{D}(0, t_1|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2).$$

根据上面的讨论，对于任意 $0<t_0\leqslant t_1$，不难知道 Ψ 映 $\mathscr{D}(0,t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$ 至自身。

第三步 光滑解的局部存在唯一性，即证明 Ψ 在 $\mathscr{D}(0, t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$ 中存在着唯一的不动点。

(i) 首先寻求这样的 $0<t_0\leqslant t_1$，使得 Ψ 在 $\mathscr{D}(0, t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$ 中紧致，即证有界集 $\Psi(\mathscr{D})$ 必存在收敛子列。

对于任意的 (u_1, v_1)、$(u_2, v_2)\in\mathscr{D}(0, t_1|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$，记 $(U_i, V_i)=\Psi(u_i, v_i)$，$i=1,2$，类似于 Ψ 的连续性证明可知，存在充分小的 $t_0\leqslant t_1$，当 $t\in[0, t_0]$ 时，有

$$|\|(U_1-U_2, V_1-V_2)\|| \leqslant c_{12}t_0 \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} |\|(u_1-u_2, v_1-v_2)\||, \tag{2.35}$$

其中

$$|\|(u, v)\||^2 = \|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^s}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{H^s}^2 + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{H^s}^2 + \int_0^{t_0} \|v(t)\|_{H^{s+1}}^2 d\tau,$$

并可取 $t_0<\dfrac{1}{c_{12}}$，即取 $t_0<\min\{t_1, 1/c_{12}\}$。记 $\rho=t_0c_{12}<1$，于是

$$|\|(U_1-U_2, V_1-V_2)\|| \leqslant \rho \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} |\|(u_1-u_2, v_1-v_2)\||. \tag{2.36}$$

任取 $(u, v)\in\mathscr{D}(0, t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$，构造 $\Psi(\mathscr{D})$ 中函数列 $\{(U_\mu, V_\mu)\}$，其中

$$(U_0, V_0)=(u, v),\quad (U_\mu, V_\mu)=\Psi(U_{\mu-1}, V_{\mu-1})$$

由 (2.36) 知，$\{(U_\mu, V_\mu)\}$ 为 $\mathscr{D}$ 中 Cauchy 序列。事实上

$$\begin{aligned} |\|(U_{\mu_1}, V_{\mu_1})-(U_{\mu_2}, V_{\mu_2})\|| &\leqslant \rho|\|(U_{\mu_1-1}, V_{\mu_1-1})-(U_{\mu_2-1}, V_{\mu_2-1})\|| \\ &\leqslant \rho^{\mu_2}|\|(U_{\mu_1-\mu_2}, V_{\mu_1-\mu_2})-(U_0, V_0)\|| \\ &\leqslant 2(4+c'+c'')R_0^2\rho^{\mu_2}\to 0,\ \text{当}\ \mu_1\geqslant\mu_2\to+\infty\ \text{时}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

于是，根据 $\mathscr{D}$ 的闭性可知，该 Cauchy 序列 $\{(U_\mu, V_\mu)\}$ 收敛，即证得有界集 $\Psi(\mathscr{D})$ 存在收敛子列，从而证明了 Ψ 的紧性。

注 实际上，(2.36) 表明非线性算子 Ψ 为 Banach 空间 $C^1([0, t_0]; H^s)\times\{C^0([0, t_0]; H^s)\cap C^1([0, t_0]; H^{s-2})\cap L^2([0, t_0]; H^{s+1})\}$ 中有界闭凸集 $\mathscr{D}(0,t_0|2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$ 上的压缩算子。

(ii) 局部存在性。根据第二步及第三步 (i) 的讨论可知 Ψ 为闭凸集 $\mathscr{D}(0, t_0|2R_0, c'R_0^2, c''R_0^2)$ 上的全连续算子，由 Schauder 不动点原理（或者根据第三步 (i) 的讨论由压缩映像原理）得知 Ψ 在 $\mathscr{D}$ 中存在一个不动点 $(u, v)=\Psi(u, v)\in\mathscr{D}$。即为 (1.10)—(1.12) 局部光滑解。

(iii) 唯一性。仿 Ψ 的连续性的证明，并应用 Gronwall 不等式，即得局部光滑解的唯一性。定理证毕。

三、一致先验估计

本节给出光滑解一个重要的先验估计.

定理 3.1 在 (H_1)、(H_2) 下,设 $u_0,\ u_1 \in H^s$,

$$(u,\ v) \in \mathscr{D}(0,\ T\,|\,2R,\ c'R^2,\ c''R^2),\ T > 0,\ R < R_1/2$$

是问题(1.10)—(1.12)的局部光滑解,则存在一个充分小的 R_0,当

$$\|u_0\|_{H^s}^2 + \|u_0 + u_1\|_{H^s}^2 \leqslant R_0^2,\ R_0 < R_1/2 \tag{3.1}$$

使得当 $R \leqslant R_0$ 时,对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 一致成立

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2 \leqslant R_0^2. \tag{3.2}$$

证 记:

$$L_1(u,\ v;\ U,\ V) \equiv U_t + U - V, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} L_2(u,\ v;\ U,\ V) \equiv\ & V_t - \Delta V + \sigma V + U - [f(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v \\ & - \nabla u) - g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u)]U \\ & - [g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) + 1 + \sigma]V. \end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $u_\varepsilon = J_\varepsilon u,\ v_\varepsilon = J_\varepsilon v$. 类似于定理 2.1 的做法,对 $L_1(u,v;u_\varepsilon,v_\varepsilon)$、$L_2(u,v;\ u_\varepsilon,\ v_\varepsilon)$ 进行微分 $D^k(0 \leqslant k \leqslant s)$,再分别对应于 $D^k u_\varepsilon$、$D^k v_\varepsilon$ 作内积,然后关于 t 积分,得到

$$\begin{aligned} I_k \equiv & \int_0^t [(D^k u_\varepsilon,\ D^k L_1(u,\ v;\ u_\varepsilon,\ v_\varepsilon)) + (D^k v_\varepsilon,\ D^k L_2(u,\ v;\ u_\varepsilon,\ v_\varepsilon))]d\tau \\ = & \frac{1}{2}(\|D^k u_\varepsilon(t)\|^2 + \|D^k v_\varepsilon(t)\|^2 - \|D^k u_\varepsilon(0)\|^2 - \|D^k v_\varepsilon(0)\|^2) \\ & + \int_0^t (\|D^k u_\varepsilon(\tau)\|^2 + \sigma\|D^k v_\varepsilon(\tau)\|^2)d\tau + \int_0^t \|D^{k+1} v_\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau \\ & - \int_0^t (D^k v_\varepsilon,\ D^k[(f(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) - g(u,\ v-u, \nabla u, \\ & \nabla v - \nabla u))u_\varepsilon + (g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) + 1 + \sigma)v_\varepsilon])d\tau \end{aligned} \tag{3.5}$$

注意到条件 (H_1), (H_2). 应用引理 2.1,得到

$$\begin{aligned} & \|D^k[(f(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) - g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u))u_\varepsilon]\| \\ & \leqslant \|D^k[(f(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) - g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u))u_\varepsilon] \\ & \quad - [f(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) - g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u)] \\ & \quad \cdot D^k u_\varepsilon\| + \|[f(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) - g(u,\ v-u,\ \nabla u, \nabla v \\ & \quad - \nabla u)]D^k u_\varepsilon\| \leqslant c_{13} R\|u_\varepsilon(t)\|_{H^s} + c_{14} R\|D^k u_\varepsilon(t)\|, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} & \|D^k[g(u,\ v-u,\ \nabla u,\ \nabla v - \nabla u) + 1 + \sigma) \cdot v_\varepsilon]\| \\ & \leqslant \|D^k[(g + 1 + \sigma)v_\varepsilon] - (g + 1 + \sigma)D^k v_\varepsilon\| + \|(g + 1 + \sigma) \cdot D^k v_\varepsilon\| \\ & \leqslant c_{15} R\|v_\varepsilon(t)\|_{H^s} + c_{16} R\|D^k v_\varepsilon(t)\|, \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中运用了条件 (H_2) 所蕴含的估计式(1.8)、(1.9).

由 Schwarz 不等式、Cauchy 不等式,并注意到(3.6)、(3.7)两式及不等式 $(a+b)^p \leqslant c(a^p + b^p)$. $(p \geqslant 1,\ a,\ b \geqslant 0,\ c$ 为某正常数),得到

$$\int_0^t (D^k v_\varepsilon, D^k[(f-g)u_\varepsilon+(g+1+\sigma)v_\varepsilon)d\tau$$
$$\leqslant \frac{\sigma}{2}\int_0^t \|D^k v_\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau+\frac{1}{2\sigma}\int_0^t \|D^k[(f-g)u_\varepsilon+(g+1+\sigma)v_\varepsilon]\|^2 d\tau$$
$$\leqslant \frac{\sigma}{2}\int_0^t \|D^k v_\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau+\frac{1}{2\sigma}c_{17}R\int_0^t \|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 d\tau$$
$$+\frac{1}{2\sigma}c_{18}R\int_0^t \|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau, \tag{3.8}$$

所以

$$I_k \geqslant \frac{1}{2}(\|D^k u_\varepsilon(t)\|^2+\|D^k v_\varepsilon(t)\|^2-\|D^k u_\varepsilon(0)\|^2-\|D^k v_\varepsilon(0)\|^2)$$
$$+\int_0^t\left(\|D^k u_\varepsilon(\tau)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|D^k v_\varepsilon(\tau)\|^2\right)d\tau$$
$$+\int_0^t \|D^{k+1}v_\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau-\frac{1}{2\sigma}c_{17}R\int_0^t \|u_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau$$
$$-\frac{1}{2\sigma}c_{18}R\int_0^t \|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau \tag{3.9}$$

关于 $k(0\leqslant k\leqslant s)$ 求和得

$$\sum_{k=0}^{s} I_k \geqslant \frac{1}{2}(\|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2+\|v_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2-\|u_\varepsilon(0)\|_{H^s}^2-\|v_\varepsilon(0)\|_{H^s}^2)$$
$$+\int_0^t\left(\|u_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2+\frac{\sigma}{2}\|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2\right)d\tau+\int_0^t \|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^{s+1}}^2 d\tau$$
$$-\frac{1}{2\sigma}\cdot s\cdot c_{17}R\int_0^t \|u_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau-\frac{1}{2\sigma}s\cdot c_{18}R\int_0^t \|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau. \tag{3.10}$$

取 $R_0=\min\left(\frac{\sigma}{sc_{17}}, \frac{\sigma^2}{2sc_{18}}\right)$，记 $\theta=\min(1/2,\sigma/4)$ 当 $R\leqslant R_0$ 时，可得

$$\sum_{k=0}^{s} I_k \geqslant \frac{1}{2}(\|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2+\|v_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2)-\frac{1}{2}(\|u_\varepsilon(0)\|_{H^s}^2+\|v_\varepsilon(0)\|_{H^s}^2)$$
$$+\theta\int_0^t(\|u_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2+\|v_\varepsilon(\tau)\|_{H^s}^2)d\tau. \tag{3.11}$$

另外，对于 $t\in[0,T]$，一致地有

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}\to\|u(t)\|_{H^s},\ \|v_\varepsilon(t)\|_{H^s}\to\|v(t)\|_{H^s}\ (\varepsilon\to 0). \tag{3.12}$$

由于 u, v 为 (1.10)—(1.12) 的光滑解，因而有

$$J_\varepsilon L_1(u, v; u, v)=J_\varepsilon L_2(u, v; u, v)=0, \tag{3.13}$$

因而

$$I_k=\int_0^t\{(D^k u_\varepsilon, D^k[L_1(u, v; u_\varepsilon, v_\varepsilon)-J_\varepsilon L_1(u, v; u, v)])$$
$$+(D^k v_\varepsilon, D^k[L_2(u, v; u_\varepsilon, v_\varepsilon)-J_\varepsilon L_2(u, v; u, v)])\}d\tau. \tag{3.14}$$

根据软化子 J_ε 的性质[8,12]可得

$$\|D^k[L_1(u, v; u_\varepsilon, v_\varepsilon)-J_\varepsilon L_1(u, v; u, v)]\|\to 0,\ 0\leqslant k\leqslant s\ (\varepsilon\to 0) \tag{3.15}$$

$$\|D^k[L_2(u,v;u_\varepsilon,v_\varepsilon)-J_\varepsilon L_2(u,v;u,v)]\|\to 0,\ 0\leqslant k\leqslant s-1\ (\varepsilon\to 0) \tag{3.16}$$

$$\left|\int_0^t (D^s v_\varepsilon, D^s[L_2(u,v;u_\varepsilon,v_\varepsilon)-J_\varepsilon(u,v;u,v)])d\tau\right|$$
$$\leqslant\left(\int_0^t \|D^{s+1}v_\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t \|D^{s-1}[L_2(u,v;u_\varepsilon,v_\varepsilon)\right.$$
$$\left.-J_\varepsilon(u,v;u,v)]\|^2 d\tau\right)^{1/2}\to 0\ (\varepsilon\to 0). \tag{3.17}$$

从而

$$I_k\to 0,\ (\varepsilon\to 0,\ 0\leqslant k\leqslant s),$$

于是令 $\varepsilon\to 0$，由 (3.11) 得

$$\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2+2\theta\int_0^t(\|u(\tau)\|_{H^s}^2+\|v(\tau)\|_{H^s}^2)d\tau$$
$$\leqslant\|u(0)\|_{H^s}^2+\|v(0)\|_{H^s}^2, \tag{3.18}$$

当 $\|u_0\|_{H^s}^2+\|u_1\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2/2$ 时，对 $0\leqslant t\leqslant T$ 一致地有

$$\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2. \tag{3.19}$$

四、光滑解整体存在唯一性

定理 4.1 在条件 (H_1)、(H_2) 下，设 u_0、$u_1\in H^s$，则存在充分小的 R_0，当

$$\|u_0\|_{H^s}^2+\|u_1\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2/2,\ R_0<R_1/2 \tag{4.1}$$

问题 (1.10)—(1.12) 存在唯一整体光滑解

$$(u,v)\in\mathscr{D}(0,\infty\,|\,R_0^2,c'R_0^2,c''R_0^2)$$

且成立能量衰减估计

$$\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2e^{-2\theta t},\ \forall t\in[0,\infty), \tag{4.2}$$

其中 $\theta=\min(1/2,\sigma/4)$.

证 令 R_0 为定理 3.1 中所取的常数，由定理 2.1 可知存在 $t_0>0$，在 $R^n\times[0,t_0]$ 上问题 (1.10)—(1.12) 存在唯一光滑解 $(u,v)\in\mathscr{D}(0,t_0\,|\,2R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$. 又根据定理 3.1 得到 (u,v) 的一致先验估计

$$\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2,\ t\in[0,t_0] \tag{4.3}$$

现以 t_0 为初始点考虑问题 (1.10)—(1.12)，由于此时"初始数据" $(u(x,t_0),v(x,t_0))$ 满足估计式 (4.3)，又一次运用定理 2.1 得到问题 (1.10)—(1.12) 光滑解可解区间可延拓至 $R^n\times[0,2t_0]$，在 $[0,2t_0]$ 上，再次运用定理 3.1，得到

$$\|u(t)\|_{H^s}^2+\|v(t)\|_{H^s}^2\leqslant R_0^2,\ t\in[0,2t_0] \tag{4.4}$$

如此反复进行下去，立即证得 (1.10)—(1.12) 的整体光滑解存在且唯一，即 $(u,v)\in\mathscr{D}(0,\infty\,|\,R_0,c'R_0^2,c''R_0^2)$. 这里所用的方法正是所谓的连续延拓方法.

关于能量指数渐近衰减估计，我们可先考虑初始数据为 $(J_\varepsilon u_0,J_\varepsilon(u_0+u_1))$ 情形，并设其相应于 (1.10)—(1.11) 的光滑解为 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$，类似于定理 2.1、定理 3.1 的处理手法，对 (1.10)、(1.11) 进行微分 D^k，再分别以 D^ku_ε、D^kv_ε 作内积，并关于 t 积分，然后对 k 求和，并运用一些不等式技巧及引理 2.1、引理 2.2，可以得到类似于定理 3.1 中

(3.16) 那样的估计式

$$\|u_\delta(t)\|_{H^s}^2 + \|v_\delta(t)\|_{H^s}^2 + 2\theta\int_0^t (\|u_\delta(\tau)\|_{H^s}^2 + \|v_\delta(\tau)\|_{H^s}^2)d\tau \leqslant \|u_\delta(0)\|_{H^s}^2 + \|v_\delta(0)\|_{H^s}^2 \leqslant R_0^2 \tag{4.5}$$

再考虑初值为 $(u_0, u_0 + u_1) \in H^s$ 的情形,并设其相应于 (1.10)—(1.12) 的光滑解为 (u, v)，由于 C_0^∞ 稠于 H^s 通过应用 Banach-saks 定理,并取极限,由 (4.5) 即得

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2 + 2\theta\int_0^t (\|u(\tau)\|_{H^s}^2 + \|v(\tau)\|_{H^s}^2)d\tau \leqslant R_0^2,\quad t \in [0,\infty) \tag{4.6}$$

即

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2 \leqslant R_0^2 e^{-2\theta t},\quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{4.7}$$

五、古典解及其渐近性质

定理 5.1　在定理 4.1 的假设下，则问题 (1.10)—(1.12) 存在唯一的古典解 (u, v)，且有渐近性质

$$\|u(t)\|_{C^2(R^n)}^2 + \|v(t)\|_{C^2(R^n)}^2 \leqslant CR_0^2 e^{-2\theta t},\quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{5.1}$$

其中 $\theta = \min(1/2, \sigma/4)$，$C > 0$ 是定常数。

证　由定理 4.1 及 $H^s \hookrightarrow C^2$ 嵌入定理易知定理 5.1 结论成立。

本文是在导师肖应昆教授的指导下完成的，并蒙李大潜教授和曹德芬副教授悉心指导和大力帮助,作者在此谨表衷心感谢。

参　考　文　献

[1] Nagumo J., Arimoto S. and Yoshizawa S., An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE*, 50(1962), 2061—2070.

[2] Yamaguti, M., The asymptotic behavior of the solution of a semilinear pertial differential equations related to an active pulse transmission line, *Proc. Japan Acad.*, 39(1963), 726—730.

[3] Schonbek M. E., *Research Notes in Maths.*, 14(1977), 213—223.

[4] 郑宋穆,沈玮熙，Fitzhugh-Nagumo 方程初边值问题整体存在性,科学通报,**16**(1984),966—969.

[5] Pao C. V., A mixed inital boundary-value problem arising in Neurophsiology, *J. Math. Anal. Appl.*, 52 (1975), 105—119.

[6] 刘亚成,刘大成,三维广义神经传播型非线拟双曲方程(组)的整体强解,数学学报,**30**(1987),536—547.

[7] Ponce G., Global existance of small solutions to a class of nonlinear evolutiǒn equations, *Nonlinear Anal., Theory, Meth. & Appl.*, 9(1985), 399—418.

[8] 郑宋穆,高维拟线性双曲抛物耦合方程组柯西问题整体光滑解,数学年刊,5A(1984),681—690.

[9] Kato T., The Cauchy problem for quasilinear symmatric hyperbolic systems, *Arat. for Rat., Mech. Appl.*, **58**(1975), 121—205.

[10] Hsiao Lin (肖　玲), Li Ta-Tsien (李大潜), Global smooth solutions of Cauehy problem for a class of quasilinear hyperbolic equations, *Chinese Annals of Mothematics*, 4B(1983), 109—116.

[11] Matsmura A., Global existance and asymptotic of the solutions with the first-order dissipation, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 13(1977), 349—379.

[12] Minzahate S., Theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Prin., 1973.

[13] Chazarin J., Piriou A., Introduction to the theory of linear partial differential equations, Noth-Holland Publ. Comp., 1981.