1994

ENTRETIEN AVEC **HENRI DARMON**

DE LA CONJECTURE DE FERMAT AU THÉORÈME

En démontrant le théorème de Fermat, le Britannique Andrew Wiles a résolu une énigme sur laquelle nombre de professionnels et amateurs s'étaient cassé les dents au fil des siècles, comme le raconte le mathématicien Henri Darmon.

Propos recueillis par **Philippe Pajot**

La Recherche **Pouvez-vous nous rappeler ce qu'est la conjecture de Fermat?**

Henri Darmon En mathématiques, une conjecture correspond à une assertion qui n'a encore jamais été démontrée. Une fois qu'elle est démontrée, elle devient un théorème. Prenons trois nombres entiers naturels x, y, z et un exposant n, entier également. Au XVII^e siècle, le mathématicien toulousain Pierre de Fermat propose que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution dès lors que n est un entier supérieur à 2. Il prétendait, dans une note écrite dans la marge d'un livre, avoir trouvé une démonstration générale simple, mais qu'il n'avait pas la place de l'écrire. D'où le nom historique de ce problème que l'on appelle parfois « grand théorème de Fermat » ou « dernier théorème de Fermat ». Aucune preuve générale de cette conjecture n'ayant été trouvée pendant plusieurs siècles ni aucun contre-exemple, l'énoncé facile à comprendre prit peu à peu la dimension d'une légende.

C'est pour cela qu'en 1993, lorsque le mathématicien britannique Andrew Wiles annonce un colloque démontrant la conjecture, il suscite un coup de tonnerre?

Oui, lorsqu'Andrew Wiles fait cette présentation, la conjecture de Fermat est l'un des problèmes ouverts les plus célèbres en mathématiques. Pour des raisons historiques d'abord: le problème, alors vieux de près de 350 ans, a acquis une envergure imposante. Pierre de Fermat avait connu un certain succès pour des cas particuliers. D'autres grands noms de l'histoire des mathématiques – Leonhard Euler, Sophie Germain, Ernst Kummer et Richard Dedekind – s'y sont attaqués avec des résultats partiels, mais sans en venir à bout. La conjecture connaît un regain de popularité dans les années 1920 quand l'industriel allemand Paul Wolfskehl offre un prix pour sa démonstration, d'une valeur considérable à l'époque. Les amateurs se laissent tenter, car elle est d'une simplicité trompeuse puisqu'il suffit de savoir multiplier et additionner les entiers pour en comprendre l'énoncé! Après tout, c'est à 11 ans qu'Andrew Wiles a pris connaissance du problème et s'est mis à y réfléchir pour la première fois… Par ailleurs, plusieurs tentatives pour la démontrer ont engendré des outils mathématiques dont l'importance dépasse celle de la question originale. C'est surtout cela qui fascine les mathématiciens professionnels.

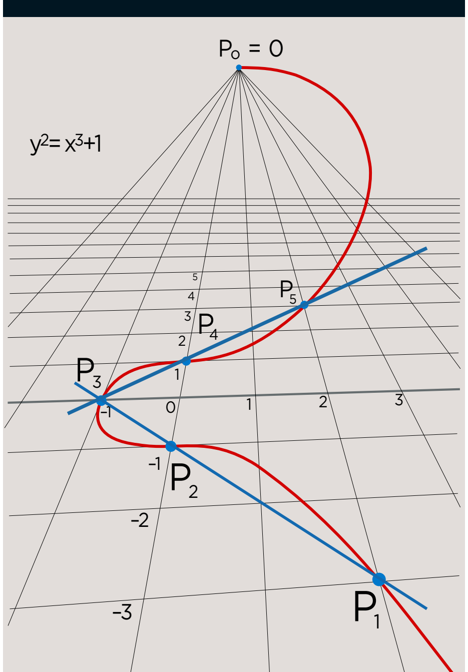
▲ *Magistrat et mathématicien toulousain, Pierre de Fermat (première décennie du XVII^e siècle - 1665) a proposé la conjecture qui porte son nom.*

Quelles ont été les grandes voies d'attaque des travaux précédents?

La conjecture a été démontrée d'abord pour $n=4$ par Fermat au XVII^e siècle puis, au XVIII^e siècle, pour $n=3$ par Euler. Leurs démonstrations font intervenir la méthode de descente de Fermat ou méthode de descente infinie. On admet que l'égalité est vérifiée pour un triplet (x, y, z), et on fabrique à partir de cette solution une solution nouvelle faisant intervenir des entiers encore plus petits; en répétant le procédé on aboutit à une contradiction puisqu'une suite

••• d'entiers strictement décroissante ne peut pas se poursuivre indéfiniment. Les choses se corsent dans la deuxième partie du XVIII[e] siècle avec la théorie des idéaux et les nombres de classes des corps cyclotomiques, de puissants outils qui permettant à l'Allemand Kummer de démontrer la conjecture pour tous les exposants plus petits que 100. Enfin, la démonstration d'Andrew Wiles passe par la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, une des questions les plus centrales dans la théorie des courbes elliptiques **(*) (Fig 1)**. Cette dernière relie en effet les courbes elliptiques, objets de nature a priori purement algébrique, à des fonctions modulaires, qui surviennent dans le monde de l'analyse de Fourier, l'étude des uns apportant un éclairage nouveau et profond sur notre connaissance des autres. C'est pourquoi la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil occupe une position privilégiée : c'est une sorte de clé de voûte dans l'imposant édifice du programme de Langlands qui occupe encore aujourd'hui la recherche mathématique en théorie des nombres **(1)**.

Fig. 1 Une courbe clé



▲ **Sur cette courbe elliptique on peut définir une addition entre des points particuliers, par exemple $P_3 + P_4 = P_1$ et $P_2 + P_3 = P_5$.**

HENRI DARMON

1965 Il naît à Paris.
1991 Il présente sa thèse à l'université Harvard.
1991-1995 Il fait son postdoctorat avec Andrew Wiles à l'université de Princeton.
2000 Il devient professeur à l'université McGill, au Canada.

DR

(*) Les fonctions elliptiques sont des courbes définies par des fonctions cubiques en x et y (de forme générale $y^2 = x^3 + ax + b$).

Comment la situation a-t-elle été débloquée ?

Dans les années 1970, le mathématicien français Yves Hellegouarch propose d'associer à une solution de l'équation de Fermat une courbe elliptique aux propriétés insolites, jetant un pont entre deux domaines jusqu'alors disparates de la théorie des nombres. Le mathématicien allemand Gerhard Frey fait la supposition – très originale et surprenante à l'époque – que cette courbe elliptique pourrait ne pas être modulaire ce qui la mettrait en violation de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, qui affirme que toutes les courbes elliptiques possèdent cette propriété. L'Américain Ken Ribet démontre alors rigoureusement que la courbe de Hellegouarch-Frey ne peut pas être modulaire, et par conséquent, que la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil implique le théorème de Fermat. Cela le met au centre des mathématiques modernes : pour les adeptes du programme de Langlands, impossible désormais de l'ignorer ! Mais la partie est encore loin d'être gagnée : le quasi-consensus en 1993 – que Wiles est sans doute le seul à ne pas partager – est que la conjecture de Shimura-Taniyama est encore plus difficile à démontrer que celle de Fermat.

Lorsqu'il entend parler de la supposition de Gerhard Frey, Andrew Wiles décide de s'attaquer à la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. Mais il y travaille alors durant huit ans en secret, sans dire sur quoi portent ses travaux. Cela est-il fréquent en mathématiques ?

Je pense que c'est assez rare. Les mathématiques deviennent de plus en plus collaboratives. Andrew Wiles a lui-même entretenu plusieurs collaborations importantes au cours de sa carrière : avant de démontrer le théorème de Fermat, il s'était illustré par des travaux décisifs sur les courbes elliptiques avec son directeur de thèse John Coates, puis sur les corps cyclotomiques et la théorie d'Iwasawa, avec Barry Mazur. Et c'est en compagnie de son ancien étudiant, Richard Taylor, qu'il vient à bout des dernières difficultés dans la démonstration du théorème de Shimura-Taniyama-Weil. Ensemble, ils mettent au point la méthode de Taylor-Wiles qui a ensuite révolutionné le domaine. Une des percées toutes récentes dans les questions de modularité, qui étend notamment le théorème de Wiles à des corps de nombres plus généraux, est traitée dans un article écrit par dix auteurs venant de sept pays différents!

Quand il présente ses travaux pour la première fois, Andrew Wiles s'aperçoit qu'il y a un trou dans sa démonstration. A-t-il eu du mal à le combler?

Je pense que les difficultés ont aussi dû être de nature psychologique: la notoriété de ce problème met beaucoup de pression sur qui prétend l'avoir démontré. Wiles était alors à l'université de Princeton. Pour ses disciples, parmi lesquels j'ai eu le privilège de figurer, étant son « postdoc » à l'époque, il n'a jamais fait de doute, même après la découverte du trou dans la démonstration, que le travail accompli ouvrait quand même une brèche décisive. Les jours de la conjecture de Fermat étaient alors comptés. Mais pour Wiles, seul au cœur de la tourmente, cela a dû être difficile. Il lui a fallu une grande force de caractère pour se concentrer sur le problème et en venir à bout, tout en étant l'objet d'une couverture médiatique intense. C'est finalement en octobre 1994 que le travail final avec Richard Taylor est publié et que la conjecture de Fermat est devenue le théorème de Fermat-Wiles.

Les techniques mises en œuvre par Wiles et Taylor utilisaient-elles des outils très novateurs?

Certainement! La théorie des nombres n'a pas fini d'épuiser les possibilités qu'offre cette merveilleuse démonstration. Depuis 1994, des problèmes autrefois jugés inaccessibles sont résolus avec une régularité époustouflante: la conjecture d'Artin pour les représentations icosahédrales, la conjecture de modularité de Serre (lire *La Recherche,* n° 442, p. 18), la conjecture de Sato-Tate. Les modularités dans des contextes de plus en plus généraux (courbes elliptiques sur les corps de nombres, surfaces abéliennes, etc.) succombe un par un aux raffinements, souvent spectaculaires et difficiles, de la démarche d'Andrew Wiles.

▲ *À l'issue de trois conférences qu'il donne en juin 1993 à Cambridge, Andrew Wiles esquisse la démonstration de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil qui entraîne le théorème de Fermat. La démonstration sera terminée en 1994.*

SCIENCE PHOTO LIBRARY / PROFESSOR PETER GODDARD

« Des problèmes autrefois jugés inaccessibles sont résolus avec une régularité époustouflante »

Cette démonstration met-elle un point final au problème ou soulève-t-elle d'autres questions?

Les progrès accomplis par Wiles dans les questions de modularité et dans le programme de Langlands ont engendré une foule de questions, motivées par le désir d'étendre la portée de la méthode. En effet, des grands pans du programme de Langlands semblent encore inaccessibles, même après la révolution Taylor-Wiles. Ce domaine de la théorie des nombres n'est jamais en reste de problèmes ouverts difficiles et importants, et il y en a sans doute encore plus aujourd'hui qu'au siècle dernier.

Finalement, la fameuse démonstration simple que Fermat disait avoir trouvée et qu'il n'avait pas la place d'écrire, pensez-vous qu'elle puisse exister?

Je ne le crois pas. Les mathématiciens, tant professionnels qu'amateurs, sont pleins de ressources. Si la démonstration de Fermat existait, quelqu'un l'aurait retrouvée. On peut dire que cette note dans la marge fut une forfanterie féconde! ■

(1) P.Pajot « Le prix Abel attribué à une figure de la théorie des nombres », *La Recherche, 535,* mai 2018, 28.